



Nelineární optika SLO/OVPLX

Jan Soubusta

Společná laboratoř optiky UP a Fyzikálního ústavu AV ČR
17. listopadu 50A, 779 07 Olomouc

Olomouc 2025

Tento text přímo navazuje na Optické vlastnosti pevných látek.

Recenzenti: zatím nikdo

1. vydání

© Jan Soubusta, 2025

© Univerzita Palackého v Olomouci, 2025

Tato publikace neprošla ve vydavatelství jazykovou úpravou.

Návázáno na publikaci OVPL z května 2014: 978-80-244-4111-5

Aktualizace a dodatečné informace k tomuto textu jsou dostupné na adrese:

<http://jointlab.upol.cz/soubusta/OVPL/>

Sazba textu: L^AT_EX, obrázky



<http://www.gle-graphics.org/>

Toto je vydání ze dne 10. dubna 2025

Obsah

Úvod	1
10 Nelineární optika	4
10.1 Co znamená lineární a nelineární optika	4
10.2 Odvození vlnové rovnice pro nelineární prostředí	6
10.3 Zákony zachování a podmínka fázové synchronizace	7
10.4 Podmínka kvazi fázové synchronizace	16
10.5 Entanglement v polarizaci	17
10.6 Shrnutí	22
10.7 Příklady	23
A Fyzikální dodatek	24
A.1 Maxwellovy rovnice pro elektromagnetické pole	24
A.2 Rozdělení látek podle materiálových vztahů	27
A.3 Globální zákony zachování	28
A.4 Odvození indexu lomu mimořádného svazku	30
A.5 Odvození indexové plochy z Fresnelovy rovnice	31
Literatura	33
Seznam použitých symbolů	35

Úvod

Tento studijní text navazuje volně na skriptum *Fyzika pevných látek* [1] vydané prvním autorem v roce 2012. Obsah byl poskládán tak, aby seznámil studenty přírodovědných oborů se základními metodami popisu optických vlastností pevných látek. V první části se probere potřebná teorie a ve druhé části se potom aplikuje na popis tří základních jevů: magnetooptického, elektrooptického a akustooptického. V této vědní oblasti byla publikována již celá řada velmi kvalitních knih, ale převážná většina publikací je dnes dostupná pouze v anglickém jazyce. Snahou autorů bylo napsat skriptum, které by ulehčilo studentům náhled do problematiky optických vlastností pevných látek i tím, že je v českém jazyce.

Jako základní text pro seznámení se s celou klasickou optikou lze doporučit knihu P. Malého: *Optika* [2] nebo anglicky psanou knihu E. Hechta: *Optics* [3]. Velmi obsáhlý výklad klasické optiky je možné najít např. v knize D.H. Goldsteina: *Polarized Light* [4], která je doplněná i o aplikace jako je elipsometrie. Jako ucelený souhrn matematiky, která se v optice používá, lze doporučit knihu *Matematický aparát fyziky* od J. Kvasnicy [5]. Pro zopakování základů kvantové mechaniky je vhodná např. kniha L. Skály [6].

Optika anizotropních krystalů je tématem publikací *Polarization of Light* (S. Huard) [7] nebo *Optical Waves in Crystals* (A. Yariv, P. Yeh) [8]. Další vybraná kniha – *Handbook of Nonlinear Optical Crystals* [9] je typickým příkladem velmi precizní publikace ruských autorů s popisem optických parametrů všech technicky významných a používaných optických materiálů. Popisu jevů a aplikací z oblasti magnetooptiky, elektrooptiky a akustooptiky se věnují již zmíněné knihy [7, 8], ale také velmi obsáhlá kniha *Fundamentals of Photonics* [10] autorů B.E.A. Saleha a M.C. Teicha. Starší vydání této knihy je možné si přečíst i ve vynikajícím českém překladu *Základy fotoniky* [11], který byl vydán v Praze v roce 1996 ve čtyřech svazcích.

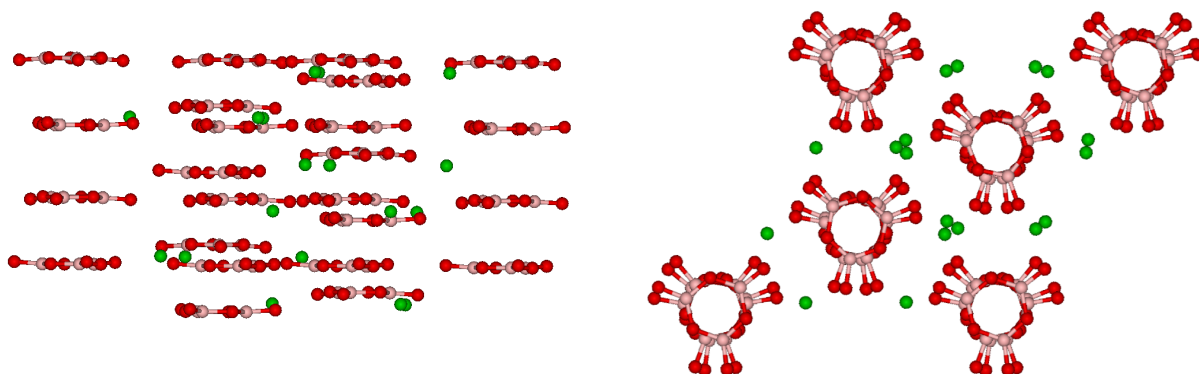
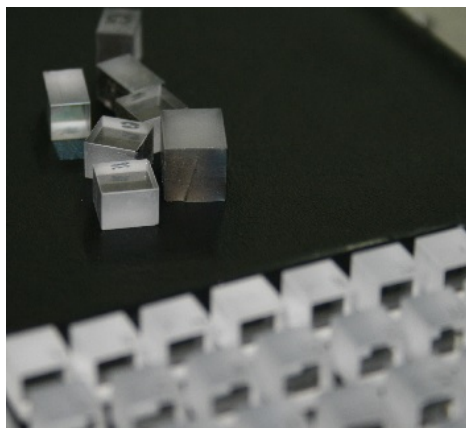


Knihy doporučené pro doplňující studium, přesné citace jsou uvedeny v kapitole Literatura na str. 33.

Pokročilejšímu čtenáři je možné doporučit knihy zabývající se optikou polovodičů jako *Semiconductor Optics* [12] nebo knihu zaměřenou na kvantový popis optických vlastností polovodičů *Quantum Theory of the Optical and Electronic Properties of Semiconductors* [13]. Na úplný závěr našeho výčtu jsme nechali dvě knížky z oblasti nelineární optiky. Autorem první z nich je Y.R. Shen (*The Principles of Nonlinear Optics*) [14] a autorem druhé je R.W. Boyd (*Nonlinear Optics*) [15].

Seznam jmenovaných knížek, které se věnují problematice optických vlastností pevných látek, by mohl být mnohem rozsáhlejší, ale další hledání přenechme vlastní iniciativě čtenáře. Navíc mnoho zajímavých textů je i na internetových stránkách známých univerzit. Jak je známo, dlouhé vysvětlování může snadno zastoupit jeden obrázek a dynamiku nějakého procesu je možné nejsnáze pochopit z reprezentativní animace. Není možné zde vypsat všechny zajímavé internetové odkazy, ale bez obav: „Kdo hledá, najde.“

Ve druhém vydání byla skriptu doplněna o kapitulu 10, která se věnuje nelineární optice. V této kapitole je pak uvedena celá řada relevantních citací, které jsou citované v kapitole Literatura na str. 33.



Fotografie uměle vyráběných nelineárních krystalů BBO (BaB_2O_4).

Převzato z webu: <https://raicol.com/bbo/bbo-for-fhg>

Rozložení atomů kolmo na optickou osu a podél osy.

Převzato z Wikipedie: https://en.wikipedia.org/wiki/Barium_borate

Kapitola 10

Nelineární optika

Obsah kapitoly

10.1 Co znamená lineární a nelineární optika	4
10.1.1 Opakování již zmiňovaných vlastností materiálových vztahů	5
10.1.2 Nelineární materiálový vztah	6
10.2 Odvození vlnové rovnice pro nelineární prostředí	6
10.2.1 Přejchod k harmonickým složkám	7
10.3 Zákony zachování a podmínka fázové synchronizace	7
10.3.1 HOM – Hongův, Ouův a Mandelův experiment	8
10.3.2 SPDC v krystalu BBO	9
Př. 1: Mimořádný index lomu jednoosého krystalu	11
Př. 2: BBO typ I a II	11
10.3.3 Geometrie fotonových párů generovaných v BBO typu I	11
10.3.4 Geometrie fotonových párů generovaných v BBO typu II	11
10.3.5 Spektra barev v SPDC	12
10.3.6 Efektivita SPDC procesu	13
Př. 3: Kolmé vektory	14
10.3.7 Efektivní nelinearita	14
10.3.8 Praktické poznámky pro generaci SPDC v jednoosých krystalech	15
10.4 Podmínka kvazi fázové synchronizace	16
Př. 4: Odhad přípustného rozladění	16
10.5 Entanglement v polarizaci	17
10.5.1 Typ I ($e \rightarrow o + o$)	18
10.5.2 Typ II ($e \rightarrow o + e$)	19
Př. 5: Výpočet polarizace fotonových párů SPDC v BBO typu II	20
10.5.3 Kwiatův zdroj entanglovaných fotonových párů	21
10.6 Shrnutí	22
10.7 Příklady	23

10.1 Co znamená lineární a nelineární optika

Dříve se lidé domnívali, že světlo v látce lze vždy chápat jako harmonickou vlnu, která je projevem lineární odezvy prostředí na dopadající elektromagnetické pole. Důsledky této linearity jsou následující:

1. index lomu n , nebo absorpční koeficient α nezávisí na intenzitě světla,
2. platí princip superpozice optických vln, které se lineárně skládají a v závislosti na fázi vzájemně interferují,

3. světlo z jednoho svazku, které se v látce překrývá se světlem druhého svazku s jiným směrem šíření, se vzájemně neovlivňují,
4. světlo v látce nemění svou frekvenci ω .

V dnešní době, kdy máme k dispozici lasery, můžeme generovat optické pole, jehož elektrická složka má intenzitu srovnatelnou s elektrostatickými silami vazeb v krystalické látce, 10^5 – 10^8 V/m. Je zřejmé, že pokud takto silné pole působí na pevnou látku, nelze již očekávat jednoduchou harmonickou odezvu této látky [10]. Je to analogické s mechanickým namáháním látky. Pokud mechanické napětí překročí mez pružnosti, nelze již pro deformaci látky použít jednoduchý Hookův zákon lineární elastické deformace. Předchozí seznam výroků musíme pro nelineární interakce invertovat. V nelineárním prostředí platí:

1. index lomu n , rychlost světla $v = c/n$ a další optické veličiny látky závisí na intenzitě,
2. při skládání optických vln se projevují odchylky vyššího řádu od prosté superpozice vln,
3. světlo z jednoho svazku může v látce ovlivňovat (modulovat, spínat) průchod druhého svazku,
4. světlo jedné frekvence může v látce generovat světlo jiné frekvence.

10.1.1 Opakování již zmiňovaných vlastností materiálových vztahů

Vraťme se nejprve k definici vlastností materiálových vztahů studované látky. Budeme potřebovat základní materiálový vztah pro elektrické veličiny:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}. \quad (10.1)$$

Pokud je vnější elektrické pole dostatečně pomalé, můžeme předpokládat, že polarizace látky $\vec{P}$ bude kmitat synchronně s budícím elektrickým polem $\vec{E}$. Pokud je ale látka pod vlivem elektrického pole s frekvencí optických polí (10^{15} Hz), musíme již místo synchronnosti uvažovat obecnější *podmínku kauzality*. Stav látky je ovlivněn vnějším polem v dané chvíli, ale také polem v časech předchozích. Důsledkem kauzality je to, že výše uvedený vztah již neplatí pro časové hodnoty polí, ale platí pro jednotlivé harmonické složky $\vec{P}(\omega)$ a $\vec{E}(\omega)$. Zpoždění reakce látky na budící pole je pak popsáno zavedením komplexního parametru (funkce odezvy) látky. V tomto případě jde o *komplexní susceptibilitu* $\widetilde{\chi}_e(\omega)$. Připomeňme, že pro rozklad pole do harmonických složek můžeme použít buď prostou sumaci, nebo integrální Fourierovu transformaci,

$$E(t) = \sum_j E(\omega_j) e^{-i\omega_j t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} E(\omega) e^{-i\omega t}.$$

Jak jsme to popisovali v kapitole 2, zavedení komplexní funkce odezvy látky umožňuje popsat absorpci a také získat vzájemné integrální vazby mezi reálnou a imaginární částí všech komplexních materiálových veličin (index lomu, susceptibilita, reflektivita). Tyto vztahy se označují jako Kramersovy-Kronigerovy relace a důsledkem této integrální vazby je disperze všech materiálů. Jelikož každá látka má v nějaké spektrální oblasti nenulovou absorpci, projeví se to tím, že přilehlá spektrální oblast již bez absorpce je *oblastí normální disperze*. V této oblasti je index lomu $n(\omega)$ rostoucí funkcí frekvence, neboli $n(\lambda)$ je klesající funkcí vlnové délky.

Další důležitou vlastností látky je otázka izotropie daného materiálu. V optice jsou totiž velmi důležité *anizotropní materiály*, pro které platí, že budící elektrické pole a polarizace jako odezva látky nejsou kolineární vektory. To je dané tím, že změna rozložení elektrického náboje v látce není určena pouze směrem vnějšího elektrického pole, ale musí rovněž respektovat mikroskopické pozice chemických vazeb v daném materiálu. Proto je třeba zavést materiálové parametry jako je susceptibilita ve formě tenzorů a do materiálového vztahu přidat skalární součin s budícím polem.

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \overleftrightarrow{\chi} \cdot \vec{E}, \quad \text{nebo ve složkách} \quad P_i = \varepsilon_0 \chi_{ij} E_j. \quad (10.2)$$

Popis anizotropie látky a odvození Fresnelovy rovnice jsme diskutovali v kapitolách 4 a 5. Pokud bychom chtěli být precizní, dala by se diskutovat ještě také lokálnost odezvy, což by vedlo k zavedení cirkulární anizotropie materiálu (viz kap. 6).

10.1.2 Nelineární materiálový vztah

Konečně se dostáváme k poslední vlastnosti materiálových vztahů, kterou chceme podrobně studovat v této kapitole, a to je linearita. Stojíme tedy před otázkou, zda můžeme materiálový vztah mezi $\vec{P}$ a $\vec{E}$, zapsaný obecně jako Taylorův rozvoj v mocninách elektrického pole, aproximovat pouze lineárním členem. Členy s vyšší mocninou jsou vždy řádově slabší, nicméně pokud nejsou principiálně nulové díky symetrii či zanedbatelné, začneme se pohybovat v oblasti nelineární optiky. Dá se říci, že nelineární optika začíná tam, kde se v látce mění vlnová délka (frekvence) optického pole. Jinými slovy nelineární odezva materiálu umožňuje vazbu mezi různými frekvenčními složkami optického pole. K tomu, aby k takovým efektům docházelo s dostatečnou účinností, je zapotřebí intenzivní koherentní svazek s odpovídající frekvencí. Ke studiu a posléze masivnímu rozšíření nelineární optiky proto došlo jen díky rozvoji laserové techniky v minulých desetiletích.

Pro studium nelineárních jevů se obvykle používají anizotropní materiály. Proto jsou parametry prostředí tenzory druhého a vyšších řádů. Taylorův rozvoj materiálového vztahu můžeme zapsat ve složkách,

$$P_i = P_i^{\text{lin}} + P_i^{\text{NL}} = \varepsilon_0 \left(\underbrace{\chi_{ij}^{(1)} E_j}_{\text{lin}} + \underbrace{\chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k + \chi_{ijkl}^{(3)} E_j E_k E_l + \dots}_{\text{NL}} \right). \quad (10.3)$$

První člen rozvoje $\vec{P}^{\text{lin}}$ je zodpovědný za lineární efekty jako je index lomu. Frekvence světla se v látce zachovává, zmenšuje se pouze rychlost šíření světla látkou. Celá nelineární optika je popsána nelineární polarizací látky $\vec{P}^{\text{NL}}$, kterou můžeme dále dělit na jevy druhého řádu ($\chi_{ijk}^{(2)}$), třetího řádu ($\chi_{ijkl}^{(3)}$) a případně ještě vyšších řádů.

10.2 Odvození vlnové rovnice pro nelineární prostředí

Pro odvození vlnové rovnice vyjdeme obdobně jako vždy z Maxwellových rovnic. Pro zjednodušení budeme uvažovat ideální dielektrikum bez volných nábojů a tedy i bez odpovídajícího proudu volných nábojů.

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}, \quad \nabla \cdot \vec{D} = 0, \quad (10.4)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (10.5)$$

K tomu přidáme jednoduché materiálové vztahy pro nemagnetické prostředí.

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H}. \quad (10.6)$$

Jako obvykle se provede druhá derivace (rotace) Faradayova zákona (MR1).

$$\begin{aligned} -\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) &= \Delta \vec{E} \\ &= \nabla \times \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{H} = \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{D} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} + \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{P}. \end{aligned} \quad (10.7)$$

Výslednou vlnovou rovnici můžeme zapsat v obvyklém tvaru,

$$\Delta \vec{E}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}(\vec{r}, t)}{\partial t^2}, \quad c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}, \quad (10.8)$$

kde vlevo máme druhé derivace elektrického pole podle prostorových a časových souřadnic. Tyto členy jsou zodpovědné za šíření harmonické vlny ve vakuu, protože ve vakuu by byla pravá strana této rovnice nulová. Podle provedeného odvození je zřejmé, jak z permitivity a permeability vakua vyplývá rychlost šíření světla ve vakuu c . Při šíření světla látkou je pravá strana rovnice nenulová a časová derivace polarizace prostředí je zdrojovým členem pro generaci jednotlivých harmonických vln.

Nyní můžeme oddělit lineární a nelineární část odezvy prostředí. $\vec{P} = \vec{P}^{\text{lin}} + \vec{P}^{\text{NL}}$. Takto můžeme zahrnout lineární odezvu prostředí do indexu lomu, který mění rychlost šíření optického pole (zpomaluje šíření). Na pravé straně si pak necháme pouze tu nelineární část, která je jako zdrojový člen zodpovědná za generaci nových harmonických složek optického pole.

$$\boxed{\Delta \vec{E} - \frac{1 + \chi^{(1)}}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}^{\text{NL}}}{\partial t^2}} \quad (10.9)$$

10.2.1 Přechod k harmonickým složkám

Pro správný popis kauzality materiálové odezvy a disperze studovaného materiálu musíme přejít k fourierovským složkám polí. Indukovanou lineární a nelineární polarizaci pak můžeme zapsat následovně:

$$\vec{P}^{\text{lin}}(\omega) = \epsilon_0 \vec{\chi}^{(1)} \cdot \vec{E}(\omega) \quad (10.10)$$

$$\vec{P}^{\text{NL}}(\omega) = \sum_j \sum_k \vec{\chi}^{(2)}(\omega = \omega_j + \omega_k) : \vec{E}(\omega_j) \vec{E}(\omega_k). \quad (10.11)$$

Dvojtečka v tomto vztahu znamená dvojnásobný skalární součin. Uveďme nyní nejčastější nelineární jevy rozdělené *podle řádu interakce*:

NL jevy druhého řádu: generace druhé harmonické (SHG), generace součtové frekvence (SFG), generace rozdílové frekvence (optické parametrické zesílení), sestupná parametrická frekvenční konverze (SPDC), trívlnné směšování (3WM).

NL jevy třetího řádu: generace třetí harmonické (THG), optický Kerrův jev, samofokusace, samomodulace fáze, čtyřvlnné směšování (4WM).

Podrobný popis těchto jevů můžeme najít v různých učebnicích optiky [10], nebo v knihách zaměřených speciálně na problematiku nelineární optiky [14, 15].

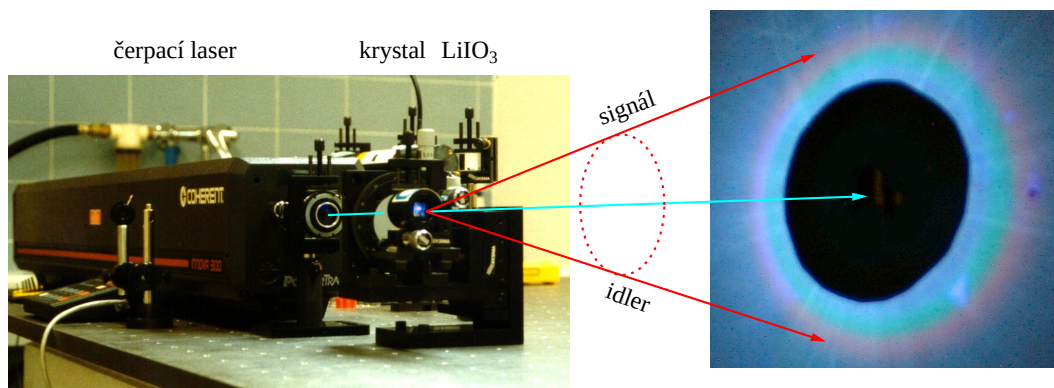
10.3 Zákony zachování a podmínka fázové synchronizace

V této sekci se budeme věnovat zákonům zachování, které musí platit samozřejmě i pro nelineární optické procesy [16]. Pro konkrétnost budeme uvažovat sestupnou frekvenční konverzi (SPDC), což je proces druhého řádu. Ten probíhá tak, že do materiálu vstupuje výhradně a pouze světlo z čerpacího laseru na frekvenci $\omega_p = 2\omega$.

Obrázek 10.1 ukazuje typickou sestavu používanou pro generaci SPDC v našich laboratořích po roce 2002. V té době jsme používali nelineární krystaly LiIO_3 . Foton čerpacího svazku z kryptonového laseru (modrý, 413.1 nm, ~ 100 mW) se v nelineárním prostředí s malou pravděpodobností ($\approx 10^{-9}$) rozpadá na dva fotony s nižší energií. Tyto dva fotony se z historických důvodů označují jako signální a jalový (*signal, idler*). Zákon zachování energie pro fotony interagujících polí lze napsat jako $2\omega \rightarrow \omega_s + \omega_i$. Oba fotony si mohou energii čerpacího fotonu rozdělit v libovolném poměru. Jako degenerovaný případ označujeme situaci, kdy si oba fotony rozdělí energii přesně na poloviny:

$$2\omega \rightarrow \omega + \omega. \quad (10.12)$$

Otočíme-li čas vznikne z degenerované SPDC známější proces generace druhé harmonické. Je to jako bychom otočili v poslední rovnici směr šipky.



Obr. 10.1: Fotografie vlevo: kryptonový laser a nelineární krystal LiIO_3 v optické montáži s nastavitelnými náklony. Fotografie vpravo: vzdálené pole SPDC zachycené na stínítku (čas 15 s, clona 2.0, ohnisko 7.19 mm)

Podmínka fázové synchronizace (PMC – *Phase Matching Condition*) vyplývá z nutnosti splnit pro nelineární interakci současně se zákonem zachování energie i zákon zachování hybnosti. Zatímco zákon

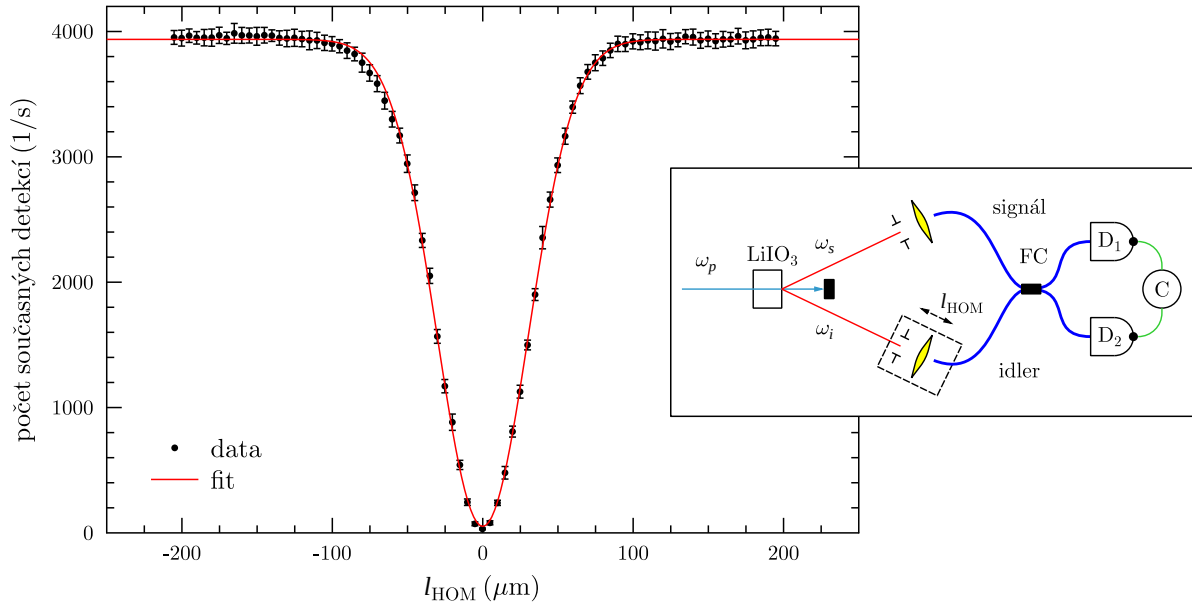
pro energii je skalární, zákon zachování hybnosti je vektorový a po zkrácení Planckovy konstanty ho lze zapsat jako zákon zachování vlnového vektoru $\vec{k}$. Podmínka fázové synchronizace tedy určuje geometrii interakce optických polí.

$$\vec{k}_p(\omega_p) = \vec{k}_s(\omega_s) + \vec{k}_i(\omega_p - \omega_s). \quad (10.13)$$

Jinými slovy, podmínka fázové synchronizace udává směry, do kterých se šíří jednotlivé barevné složky vygenerovaného pole. Vlnové délky se vždy mění spojitě se změnou směru (výstupního úhlu) takže na stínítku za krystalem se nám zobrazí barevná duha, viz obr. 10.1 vpravo.

10.3.1 HOM – Hongův, Ouův a Mandelův experiment

Platnost obou fundamentálních zákonů zachování v uvedeném tvaru vyplývá z faktu, že stav krystalu se během nelineární interakce nemění. Dochází tedy k přenosu energie pouze mezi optickými poli. Protože signální i jalové pole jsou před rozpadem čerpacího fotonu ve vakuovém stavu, hovoří se o tom, že je SPDC proces stimulován náhodnými fluktuacemi vakua a jako takový vzniká ve zcela náhodném časovém okamžiku. Nicméně i v případě kontinuálního čerpání jsou signální a jalový foton z jednoho páru vždy velmi přesně časově synchronizovány. Toho využili poprvé autoři Hong, Ou a Mandel (*HOM*) k ověřování interference fotonů jakožto bosonů na děliči svazku [17].



Obr. 10.2: Vpravo schéma experimentu pro měření HOM dipu, vlevo měřený dip. Popis experimentu viz text.

Při používání zdroje fotonových párů z fotografie na obr. 10.1 jsme i my proměřili dvoufotonovou interferenci (tzv. HOM dip). Schéma tohoto experimentu a typický výsledek měření dipu jsou zakresleny na obr. 10.2. Jak je zřejmé, k interferenci signálního a jalového fotonu dochází na vláknovém děliči optických svazků (FC) s dělicím poměrem blízkým 50:50. Vzájemné zpoždění obou fotonů l_{HOM} se provádí pomocí vzdalování/přibližování vláknového kolimátoru k nelineárnímu krystalu LiIO_3 . Současné detekce fotonů na obou detektorech D_1 a D_2 se vyhodnocují pomocí koincidenční elektroniky (C). Zde byly použity jednofotonové detektory SPCM-AQ-141-FC (PerkinElmer) a koincidenční elektronika TAC/SCA (Ortec). Současná detekce (*coincidence*) znamená překryv náběžné hrany signálů v symetricky nastaveném časovém okně šířky 1 ns.

Při dostatečném rozposunutí, $|l_{\text{HOM}}| > 200 \mu\text{m}$, dochází k tomu, že vlnové balíky signálního a jalového fotonu se na děliči vůbec nepotkají. Díky tomu v polovině případů projde do každého výstupu právě jeden foton a elektronika zaznamená koincidenci, protože časové zpoždění je pouze 667 fs. Těchto koincidencí je řádově $4 \times 10^3 \text{ s}^{-1}$. Posunem do dipu, $|l_{\text{HOM}}| = 0 \mu\text{m}$, dojde k tomu, že se fotony shluknou a budou vycházet vždy dva do jednoho výstupního ramene, kdežto ve druhém rameni zůstane vakuum. Koincidence jdou na tomto místě ideálně k nule. Šířka změřeného HOM dipu je nepřímou úměrná šířce spektra fotonů z páru a v zobrazeném případě, kdy lze dip fitovat gaussovskou křivkou, je možné dojít v prvním přiblížení

k následujícímu vztahu pro pološířku spektra,

$$\text{FWHM}_\lambda = \frac{2\sqrt{2} \ln 2}{\pi} \frac{\lambda^2}{\text{FWHM}_{\text{dip}}}. \quad (10.14)$$

Na obr. 10.2 je FWHM křivky dipu 72 μm , což dává v časové oblasti 240 fs a odpovídá šířce spektra 5.9 nm. Za λ jsme dosadili vlnovou délku pro degenerovaný případ SPDC (826 nm).

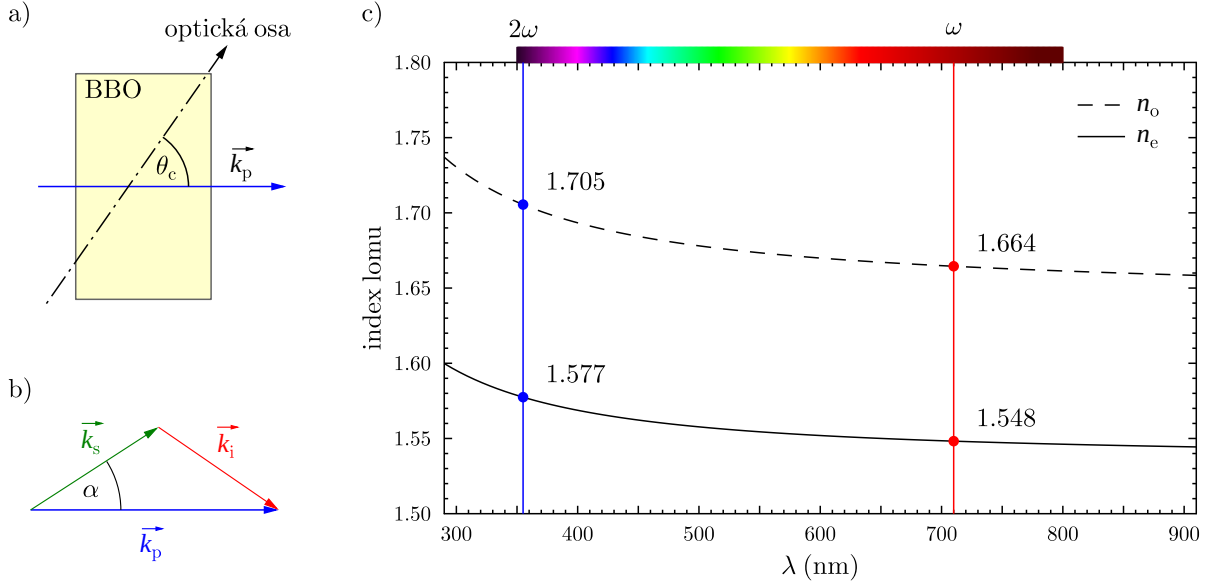
V článcích [18, 19, 20] jsme publikovali naše výsledky měření časových a spektrálních korelací fotonových párů. Jak jsme prokázali, pomocí spektrální filtrace je možné rozšířit vlnové balíky fotonů a tedy prodloužit oblast vzájemné interference fotonů.

10.3.2 SPDC v krystalu BBO

Od krystalů LiIO_3 jsme velmi rychle přešli k nelineárním krystalům BBO. Tento materiál se díky svým výhodným parametrům a díky tomu, že se dá uměle pěstovat, stal velmi hojně užívaným materiálem jak v nelineární optice, tak v komerčních laserových systémech. Přehledový článek s parametry tohoto materiálu publikoval ruský fyzik D.N. Nikogosyan v roce 1991 [21]. Jde o sůl s chemickým vzorcem BaB_2O_4 . Uspořádání atomů v krystalu odpovídá trigonální soustavě (klencová) odpovídající grupě symetrie $3m \equiv C_{3v}$. Z toho plyne, že musí jít z pohledu lineární anizotropie o jednoosý materiál. Experiment pak doplňuje, že se jedná o jednoosý negativní krystal, neboť pro jeho indexy lomu platí $n_e < n_o$. Protože tento materiál budeme i nadále často zmiňovat, je vhodné uvést empirické Sellmeierovy rovnice pro indexy lomu BBO od firmy Eksma, jejíž krystaly často používáme.

$$\begin{aligned} n_o^2(\lambda) &= 2.7405 + \frac{0.0184}{\lambda^2 - 0.0179} - 0.0155\lambda^2, \\ n_e^2(\lambda) &= 2.3730 + \frac{0.0128}{\lambda^2 - 0.0156} - 0.0044\lambda^2. \end{aligned} \quad (10.15)$$

Takto napočítaná disperze indexů lomu pro BBO ve viditelné oblasti je vykreslena na obr. 10.3c).



Obr. 10.3: a) Hlavní rovina krystalu BBO při dopadu čerpacího laseru kolmo na rozhraní. b) Vektorová konstrukce podmínky fázové synchronizace pro SPDC. Úhel α udává směr generovaných fotonů. c) Disperze řádného (n_o) a mimořádného (n_e) indexu lomu BBO ve viditelné oblasti spektra. $\lambda_p = 355 \text{ nm}$.

Z pohledu potenciálního využití v nelineární optice je naprosto nezbytné to, že tento krystal nemá střed symetrie. Díky tomu je $\chi_{ijk}^{(2)}$ jako polární tenzor třetího řádu pro BBO nenulový. Krystal BBO je průhledný jako sklo v celé viditelné oblasti, viz úvodní obrázek této kapitoly na str. 3. Pro nelineární optiku je nutné, aby krystal nedegradoval při průchodu intenzivního laserového svazku, pro BBO se udává práh zničení $>5 \text{ GW/cm}^2$. Na tomto krystalu budeme zkoumat proces SPDC, kdy do krystalu

kolmo k rozhraní vstupuje čerpací laser s vlnovou délkou 355 nm. Tuto geometrii ukazuje obr. 10.3a), kde θ_c značí úhel sklonu optické osy vůči procházejícímu čerpacímu svazku (kat, *cut-angle*). Krystal se obvykle vyleští tak, aby dopadající svazek vstupoval do krystalu prakticky kolmo k vstupnímu rozhraní.

Podobný obrázek jsme viděli při výkladu anizotropie (viz obr. 5.5). Jejím důsledkem je to, že čerpací svazek s mimořádnou polarizací se bude mírně odklánět dolů směrem od optické osy. Úhel tohoto dvojlomu (*walk-off*) jsme označili ρ . Jeho velikost se počítá podle vztahu (5.21). V tomto skloněném směru šíření optického svazku míří Poyntingův vektor. Pro určení podmínky fázové synchronizace jsou ale podstatné pouze směry vlnových vektorů $\vec{k}$.

Pro velikost vlnového vektoru světla s frekvencí ω a indexem lomu n musí platit $k = n\omega/c$. Aby bylo možné složit vlnový vektor čerpání $\vec{k}_p$ z vlnových vektorů signálního a jalového fotonu, musí platit trojúhelníková nerovnost (obr. 10.3b)). V degenerovaném případě (10.12) ji lze zapsat jako

$$k(2\omega) \leq 2k(\omega) \quad \Rightarrow \quad n(2\omega)\frac{2\omega}{c} \leq 2n(\omega)\frac{\omega}{c}.$$

Po zkrácení dostaneme podmínku, která musí platit pro indexy lomu na frekvenci čerpání a na frekvenci generovaných fotonů z páru, $n(2\omega) \leq n(\omega)$. Tato podmínka je ale v naprostém rozporu s obvyklým chováním indexu lomu, neboť v oblasti normální disperze je index lomu rostoucí funkcí frekvence, jak to pro BBO ukazuje obr. 10.3c). Proto se jako nelineární materiály začaly používat anizotropní krystaly, které splňují PMC díky využití různých indexů lomu pro různé polarizace světla. Podle směrů polarizací nazýváme jednotlivé typy procesů (o – řádný svazek, e – mimořádný svazek).

typ 0: o $\rightarrow$ o + o, nelze v tomto případě splnit,

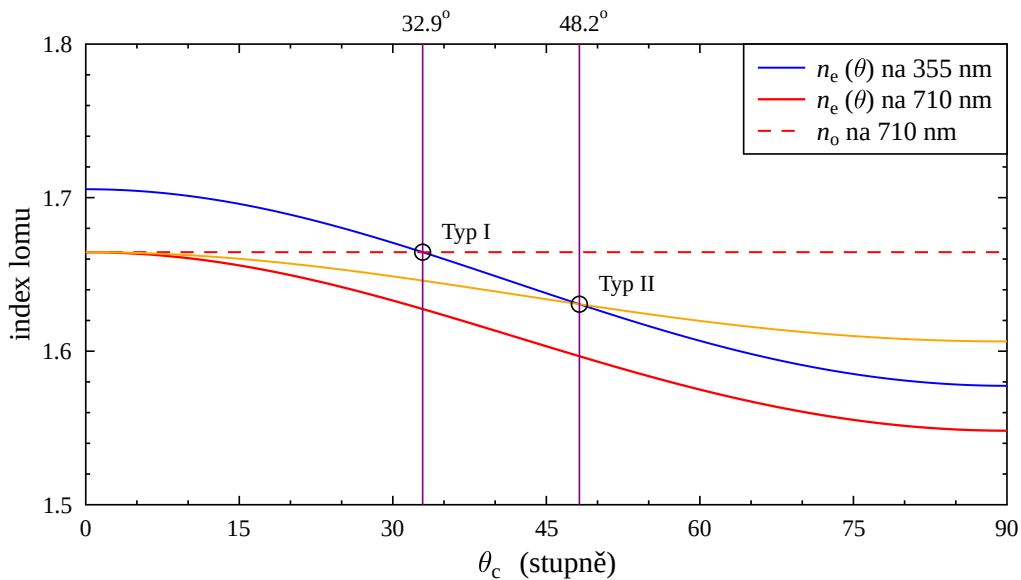
typ I: e $\rightarrow$ o + o, $n_e(2\omega) < n_o(\omega)$,

typ II: e $\rightarrow$ e + o, $n_e(2\omega) < (n_e(\omega) + n_o(\omega))/2$.

Řádný index lomu v jednoosém krystalu nezávisí na směru $\vec{k}$. Naproti tomu mimořádný index lomu závisí na úhlu θ mezi vlnovým vektorem $\vec{k}$ a optickou osou. Tuto závislost, která vyplývá z indexového elipsoidu, můžeme matematicky zapsat následovně,

$$n_e^2(\theta) = \frac{n_o^2}{1 - \sin^2 \theta (1 - (n_o/n_e)^2)} = \frac{n_e^2}{1 - \cos^2 \theta (1 - (n_e/n_o)^2)}. \quad (10.16)$$

Výsledek ukazují modrá a červená křivka v obr. 10.4.



Obr. 10.4: Výpočet mezního úhlu sklonu θ_c pro čerpání SPDC v BBO na 355 nm.

Př. 10.1: Mimořádný index lomu jednoosého krystalu: Ze vztahů odvozených pro indexový elipsoid jednoosého krystalu v kapitole 5 odvoďte alternativní vztah pro úhlovou závislost indexu lomu mimořádného svazku (10.16).

Př. 10.2: BBO typ I a II: Pomocí hodnot z obr. 10.3c) ověřte splnění PMC v BBO.

Pro BBO tedy nelze jednoduše sfázovat proces typu 0. Naproti tomu typ I a typ II mají určitý minimální mezní úhel sklonu θ_c , od kterého lze proces sfázovat, viz obr. 10.4. Pro typ I tedy musí být: $\theta_c \geq 32.9^\circ$, pro typ II: $\theta_c \geq 48.2^\circ$. Pro tento minimální úhel je SHG proces kolineární. Účinnost SPDC procesu ale postupně klesá s rostoucím úhlem θ_c . Proto je vhodné zvolit tento úhel co nejmenší. Tomu potom odpovídá malý výstupní úhel pro kužel generovaných fotonových párů. Pro úhel sklonu $\theta_c = 90^\circ$ bude odklon generovaných fotonů od osy čerpacího svazku největší. V našich prvních experimentech, kdy jsme používali krystal LiIO_3 právě v tomto uspořádání čerpání kolmo na optickou osu, byl výstupní úhel SPDC cca. 34° . Pro BBO by byl tento úhel 32° , ale tato kolmá geometrie se u BBO nepoužívá, protože účinnost procesu se pro tento kat krystalu blíží limitně k nule.

10.3.3 Geometrie fotonových párů generovaných v BBO typu I

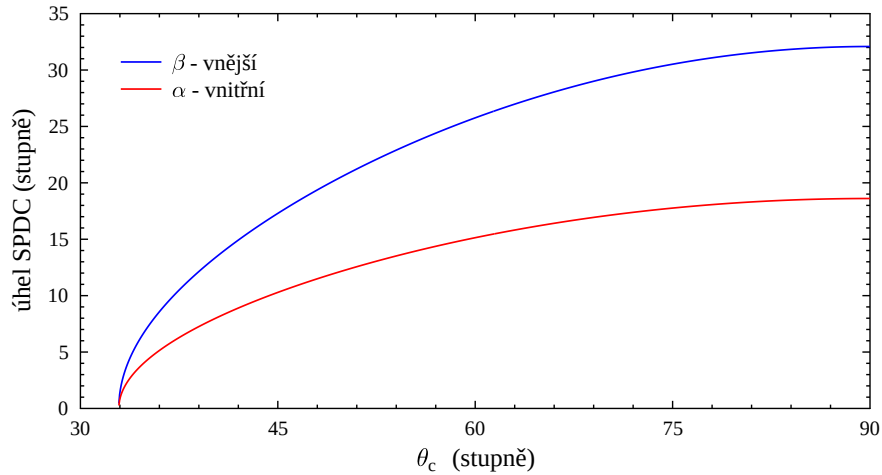
Z poměru k -vektorů spočítáme úhel α generovaných fotonových párů v procesu typu I,

$$n(2\omega)\frac{2\omega}{c} = 2n(\omega)\frac{\omega}{c} \cos(\alpha) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\cos(\alpha) = \frac{n_e(\theta_c, \lambda_p)}{n_o(\lambda_s)}} \quad (10.17)$$

Je potřeba si uvědomit, že úhel α spočítaný z PMC podmínky (10.17) platí pro šíření světla uvnitř nelineárního krystalu. Poté, co světlo složené z párů fotonů dorazí na konec nelineárního krystalu, je potřeba ještě dopočítat úhel β lomu světla do vzduchu podle standardního *Snellova zákona*,

$$\sin(\beta) = n_o(\lambda_s) \sin(\alpha).$$

Typický výsledek pro krystal BBO čerpáný na vlnové délce 355 nm je vykreslen na obr. 10.5



Obr. 10.5: Závislost úhlů degenerované SPDC typu I pro BBO krystal na orientaci θ_c optické osy: vnitřní úhel generace (červená čára), výstupní úhel z krystalu (modrá čára). Čerpací vlnová délka je 355 nm.

10.3.4 Geometrie fotonových párů generovaných v BBO typu II

U SPDC typu II v BBO má signální foton řádnou polarizaci a jalový foton (idler) mimořádnou polarizaci. Díky rozdílným indexům lomu obou fotonů budou různé délky jejich k -vektorů a oba fotony budou mít jiný úhel α_o , resp. α_e . Díky tomu tedy musíme řešit soustavu dvou rovnic: první je projekce PCM do roviny kolmo na směr čerpání a druhá rovnice je projekce PMC do směru čerpacího svazku. Zkusme si to

zapsat obecně i pro případ, kdy jsou vlnové délky obou generovaných fotonů různé

$$\begin{aligned}\frac{n_o}{\lambda_s} \sin(\alpha_o) &= \frac{n_e(\theta, \lambda_i)}{\lambda_i} \sin(\alpha_e), \\ \frac{n_o}{\lambda_s} \cos(\alpha_o) + \frac{n_e(\theta, \lambda_i)}{\lambda_i} \cos(\alpha_e) - \frac{n_e(\theta_c, \lambda_p)}{\lambda_p} &= 0.\end{aligned}\tag{10.18}$$

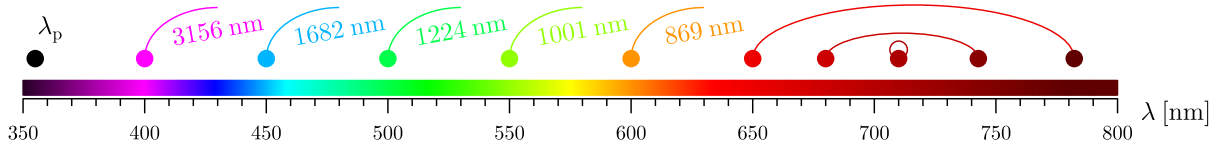
Jak se při řešení postupuje? Nejjednodušší metoda je půlením intervalu. Hledáme úhel α_e v intervalu $(0, \pi/2)$. Pro zvolené α_e dopočítáme z geometrie úhel odklonu vektoru $\vec{k}_e$ od optické osy θ a ze vztahu (10.16) spočítáme odpovídající index lomu. Z první rovnice určíme úhel α_o . Spočítáme levou stranu druhé rovnice a podle znaménka výsledku se určí správná polovina rozpůleného intervalu. Iterativním postupem dojdeme během deseti kroků k dostatečně přesnému výsledku na desetinu úhlového stupně.

10.3.5 Spektra barev v SPDC

Zatím jsme uvažovali hlavně degenerovaný případ SPDC, kdy signální i jalový foton mají stejnou frekvenci ω a tedy i barvu. Za podmínky splnění požadavků fázového sladění mohou ale vznikat i fotonové páry, které si energii rozdělí na různé díly, $2\omega \rightarrow \omega_s + \omega_i$. To můžeme snadno přepsat na podmínku pro vlnové délky, která vypadá následovně,

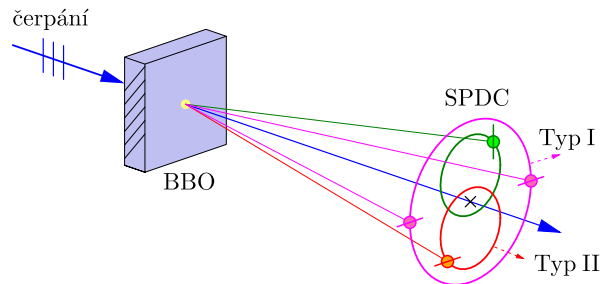
$$1/\lambda_p = 1/\lambda_s + 1/\lambda_i.$$

Spektrum párů fotonů při čerpání vlnovou délkou 355 nm je patrné z obr. 10.6. Vlnové délky signálního a jalového fotonu, které patří do jednoho vygenerovaného páru, jsou spojeny obloučkem. Vlnové délky v IR (tj. mimo zobrazený rozsah) jsou pouze zapsány číselnou hodnotou.



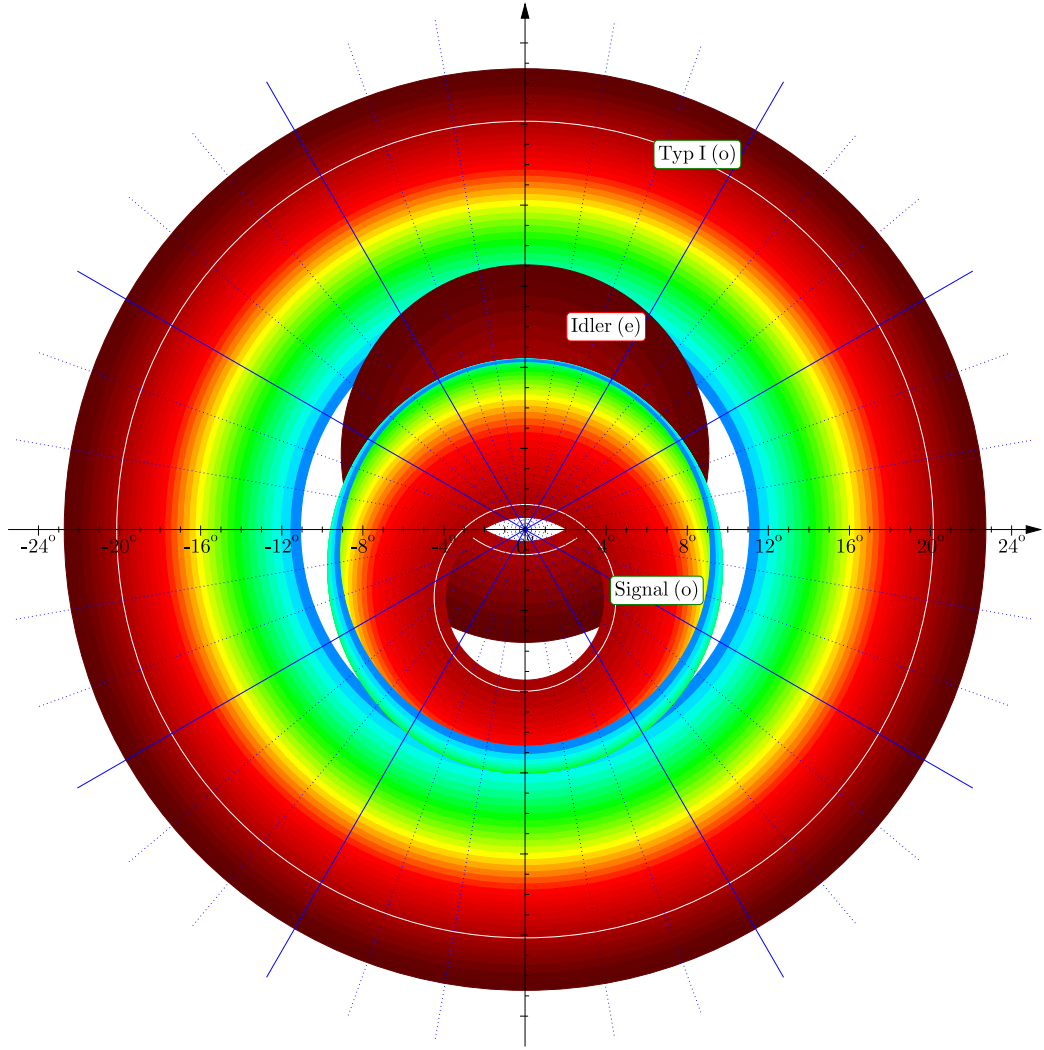
Obr. 10.6: Zákon zachování energie pro spektrum SPDC fotonových párů při čerpání na $\lambda_p = 355$ nm.

Pokud se podíváme očima přes filtr blokující modré světlo na krystal BBO čerpaný modrým nebo UV světlem a budeme pohybovat hlavou, uvidíme na výstupu duhu barev z celého viditelného spektra. Použijeme-li krystal, který může generovat procesy typu I i II současně, potom geometrie výstupních polí bude odpovídat schématu na obr. 10.7. Hlavní rovina BBO je svislá a leží v ní optická osa. Čerpání s vertikální polarizací proto představuje mimořádný svazek. V procesu typu I vznikají dva horizontálně polarizované řádné fotony. Ty leží proti sobě na kuželu s větším výstupním úhlem (označeny fialově). V procesu typu II je v kuželu nad osou mimořádný foton (označen zeleně) a v kuželu pod osou řádný foton (označen červeně).



Obr. 10.7: Geometrie výstupních polí SPDC za BBO krystalem. Směr optické osy krystalu je naznačen na boku. Lineární polarizace jednotlivých svazků je naznačena čárkou.

Ve vzdáleném poli za krystalem pak bude možné na stínítku pozorovat duhu, viz obr. 10.8. Blíže osy jsou dva kužely odpovídající typu II. Na vnějším kuželu typu I leží oba fotony z páru. Degenerovaný případ vlnové délky 710 nm je pro přehlednost v obrázku spekter vyznačen bílou kružnicí.



Obr. 10.8: Výpočet spektra SPDC ve vzdáleném poli za BBO krystalem pro zadané parametry: $\theta = 49.3^\circ$, $\lambda_p = 355 \text{ nm}$.

10.3.6 Efektivita SPDC procesu

Pro krystal BBO se symetrií $3m \equiv C_{3v}$ je tvar tenzoru nelineární susceptibility zapsaný ve zkrácené notaci pomocí multiindexů následovný:

$$\overset{3\leftrightarrow}{\chi}_{\text{BBO}} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \chi_{31} & -\chi_{22} \\ -\chi_{22} & \chi_{22} & \cdot & \chi_{31} & \cdot & \cdot \\ \chi_{31} & \chi_{31} & \chi_{33} & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right). \quad (10.19)$$

Nulové koeficienty jsou v matici označeny tečkou. Velikost nenulových koeficientů je $\chi_{22} = 2.22 \text{ pm/V}$ a $\chi_{31} = 0.16 \text{ pm/V}$. Význam jednotlivých členů na různých místech matice je následující. V levém čtverci jsou na diagonále členy zodpovědné za procesy typu 0, ostatní členy vlevo umožňují procesy **typu I**. Vpravo jsou procesy **typu II**. Při počítání efektivity není vhodné tenzor (10.19) transformovat do laboratorní soustavy, ztratila by se tím přehlednost. Navíc jde o tenzor třetího řádu zapsaný pomocí multiindexů, který by bylo nutné pro transformaci přepsat do úplného tvaru se třemi indexy.

Obecné řešení, kdy čerpání, signál i idler mají různé směry, nelze analyticky provést. Proto se pro výpočet efektivy předpokládá pouze kolineární případ a všechny vektory se převedou do os krystalu. Uvažujme směr vlnového vektoru zadaný v souřadnicích os krystalu pomocí sférických úhlů. Jednotkový vektor ve směru vlnového vektoru napíšeme jako

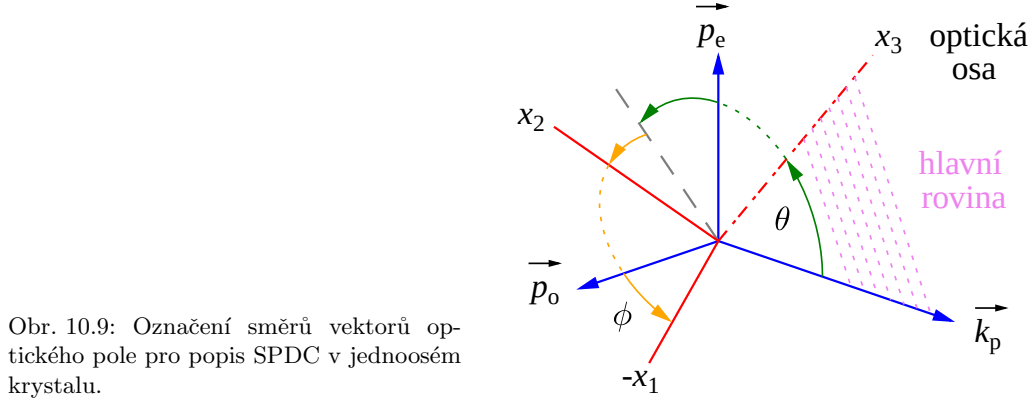
$$\vec{k} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta).$$

Vlastní stavy polarizace jsou lineární polarizace $\vec{D}_o$ a $\vec{D}_e$. Pro výpočet efektivy nelineárního procesu

SPDC ale potřebujeme pouze jednotkové vektory ve směru lineární polarizace optických polí,

$$\begin{aligned}\vec{D}_o &\propto \vec{p}_o = (\sin \phi, -\cos \phi, 0) \\ \vec{D}_e &\propto \vec{p}_e = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta)\end{aligned}$$

Vektory $\{\vec{k}, \vec{p}_o, \vec{p}_e\}$ tvoří ortonormální bázi. Přitom $\vec{p}_o$ je kolmý na optickou osu, takže má nulovou třetí složku, neboť optická osa má směr $(0, 0, 1)$, viz obr. 10.9.



Obr. 10.9: Označení směrů vektorů optického pole pro popis SPDC v jednoosém krystalu.

Pokud chceme vytvořit kvadrát elektrického pole $E^{(2)}$ pro generaci SHG jako sloupcový vektor, kterým budeme násobit matici susceptibility (10.19) zprava, musíme postupovat následovně:

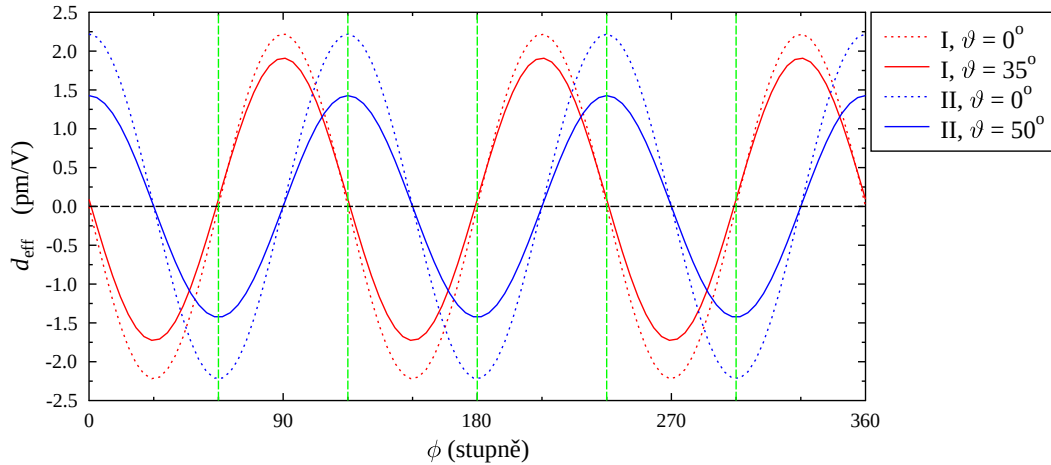
$$E^{(2)}(\vec{x}, \vec{y}) = [x_1 y_1, x_2 y_2, x_3 y_3, x_2 y_3 + x_3 y_2, x_1 y_3 + x_3 y_1, x_1 y_2 + x_2 y_1].$$

Pro SPDC představuje kvadrát pole $E^{(2)}$ pár fotonů – signální a jalový. Výpočet efektivity je tedy analogický, neboť SPDC je vlastně časovou inverzí generace součtové frekvence.

Př. 10.3: Kolmé vektory:

- Ověřte kolmost vektorů a) $\vec{k} \perp \vec{p}_o \perp \vec{p}_e \perp \vec{k}$;
b) vektor $\vec{p}_o$ je kolmý na optickou osu.

10.3.7 Efektivní nelinearita



Obr. 10.10: Efektivní nelinearita pro dva různé úhly θ . Pro 0° je efektivita nejvyšší (tečkované čáry), ale procesy nelze sfázovat. Pro 35° resp. 50° je efektivita menší, ale jednotlivé procesy lze sfázovat (plně čáry).

Koeficient efektivní nelinearity získáme vynásobením matice susceptibility (10.19) zleva polarizací čerpání a zprava kvadrátem polarizace fotonových párů,

$$d_{\text{eff}}(\vec{x} + \vec{y} \rightarrow \vec{z}) = \vec{z} \cdot \overset{3\leftrightarrow}{\chi} \cdot E^{(2)}(\vec{x}, \vec{y}). \quad (10.20)$$

V objemových krystalech jsou možné pouze dva typy fázové synchronizace: typ I a typ II. Pro ně dostaneme závislost efektivní nelinearity na směru šíření a polarizace, které jsou zadané úhly (θ, ϕ) .

$$\begin{aligned} e \rightarrow o + o : \quad d_{\text{eff}}^{\text{I}} &= \vec{p}_e \cdot \overset{3\leftrightarrow}{\chi} \cdot E^{(2)}(\vec{p}_o, \vec{p}_o) \\ &= -\chi_{31} \sin \theta + \chi_{22} \cos \theta \sin(3\phi), \\ e \rightarrow e + o : \quad d_{\text{eff}}^{\text{II}} &= \vec{p}_e \cdot \overset{3\leftrightarrow}{\chi} \cdot E^{(2)}(\vec{p}_o, \vec{p}_e) \\ &= \chi_{22} \cos^2 \theta \cos(3\phi). \end{aligned} \tag{10.21}$$

Efektivní nelinearita obou typů procesů je zakreslena v obr. 10.10 jako funkce úhlu ϕ rotace kolem optické osy. Maxima obou procesů se opakují po 60° a je jich dokola šest. Pro optimalizaci procesů typu I i II se uvažují dominantní členy s větším koeficientem χ_{22} . Proto je pro typ I optimální úhel rotace krystalu $\phi = 90^\circ$. Pro typ II je optimální $\phi = 0^\circ$. Pro krystal říznutý na typ II bude přesto svítit i typ I ovšem s koeficientem χ_{31} a bude tedy o řád slabší.

10.3.8 Praktické poznámky pro generaci SPDC v jednoosých krystalech

- Podmínka fázové synchronizace nezávisí na úhlu ϕ , ale efektivita NL procesu na něm závisí.
- Pro směry interagujících polí lze odvodit přesné analytické výrazy, pokud je mimořádný (extraordinary) nanejvýš jeden svazek.
- V ostatních případech je potřeba provést řešení PMC numericky. Výsledkem je hladká závislost, která se dá proložit empirickou závislostí s přesností 0.2° . Tato přesnost pro návrh geometrie použití nelineárního krystalu obvykle stačí.
- Pro často používané krystaly jsou známy Sellmeierovy vztahy závislosti indexů lomu n_o, n_e na vlnové délce. Je ale vhodné použít vztahy dodané přímo výrobcem krystalu, neboť zbytkové příměsi obsažené v materiálu mohou tyto hodnoty mírně ovlivňovat.
- Je třeba mít stále na paměti, že PMC řeší směry generace fotonových párů uvnitř krystalu. Nás samozřejmě bude zajímat směr fotonů, které již opustí nelineární krystal. Na rozhraní je tedy třeba splnit lom světla podle Snellova zákona.
- Pro optimalizaci je výhodné pokrýt vstupní stěnu krystalu antireflexní (AR) vrstvou pro čerpací vlnovou délku a výstupní stěnu AR vrstvou jak pro čerpání, tak pro generované fotonové páry, aby se omezily zpětné odrazy. AR na výstupu musí počítat s tím, že generované fotony neprocházejí výstupním rozhraním kolmo.
- Obecně je třeba vzít v úvahu i závislost parametrů krystalu na teplotě a případně dalších vnějších vlivech (tlak, magnetické pole). Teplotní stabilizace je extrémně důležitá pro periodicky pólované materiály, které budeme diskutovat v následující sekci.

10.4 Podmínka kvazi fázové synchronizace

Podmínka fázové synchronizace PMC fyzikálně odpovídá prostorové rezonanci mezi vlnou nelineární polarizace, která je zdrojovým členem ve vlnové rovnici (10.9), a produkovaným optickým polem na téže frekvenci. Pokud ale není PCM splněna, je efektivita nelineárního procesu velmi slabá. Např. pro SHG to můžeme zapsat jako

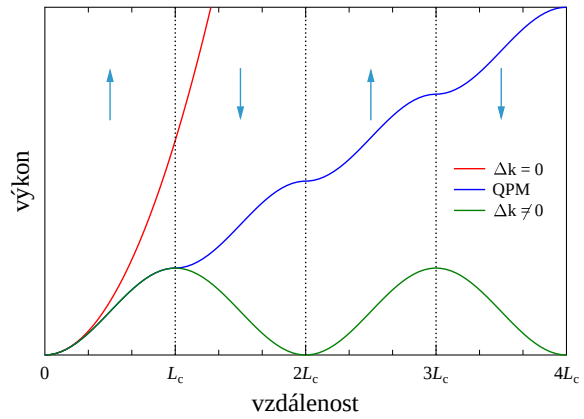
$$I^{\text{SHG}} = I_{\text{max}} \frac{\sin^2(\Delta k L/2)}{(\Delta k L/2)^2}, \quad (10.22)$$

kde $\Delta \vec{k} = \vec{k}_3 - \vec{k}_1 - \vec{k}_2$ představuje rozladění k -vektorů a L je délka nelineárního prostředí.

Př. 10.4: Odhad přípustného rozladění: Výše uvedený vztah efektivit představuje kvadrát funkce sinc, která je definovaná jako $\sin(x)/x$. Odhadněte možné fázové rozladění pro NL krystal délky 1 cm.

Podmínka (10.22) znamená, že jsme v nelineární optice limitováni parametry dostupných krystalů, které pak určují geometrii probíhajících procesů. Toto je velmi omezující hlavně u nelineárních vlnovodů, kde jsme z principu vlnovodu omezeni pouze na kolineární geometrii. Pokud je při kolineární geometrii $\Delta k \neq 0$, bude intenzita SHG oscilovat s periodou $2L_c$, jak to ukazuje obr. 10.11. Vzdálenost L_c se označuje jako koherenční vzdálenost, na které dochází k nárůstu SHG výkonu, pak začne výkon opět klesat k nule.

Obr. 10.11: Závislost výkonu generované druhé harmonické na vzdálenosti průchodu čerpacího svazku v nelineárním krystalu. Červeně je zobrazen kvadratický vzestup při přesném sfázování, zeleně jsou zakreslené oscilace výkonu při nedokonalém sfázování. Modrá křivka QPM odpovídá splnění podmínky kvazi fázové synchronizace a přibližně se dá označit jako lineární nárůst generovaného výkonu. Směry pólování materiálu jsou ve vrstvách označeny šipkami.



Striktní podmínka fázové synchronizace nedovoluje generovat v objemových krystalech procesy typu 0. To jsou procesy, kdy mají všechny tři interagující fotony stejnou polarizaci. Z principu má tedy tato interakce nejvyšší nelineární koeficient. Proto se začaly používat fotonické struktury z feroelektrických materiálů jako je PP-KTP (periodicky pólované KTP, KTiOPO_4), kde platí alternativní podmínka kvazi fázové synchronizace (QPM - *quasi phase-matching*) [22, 23, 24]. Můžeme si to představit tak, že se po vzdálenosti L_c změní orientace feroelektrické domény, tím se otočí znaménko nelineární interakce a intenzita SHG začne opět stoupat. Vzestup výkonu generovaného pole je tedy prakticky lineární s délkou krystalu, viz modrá křivka v obr. 10.11.

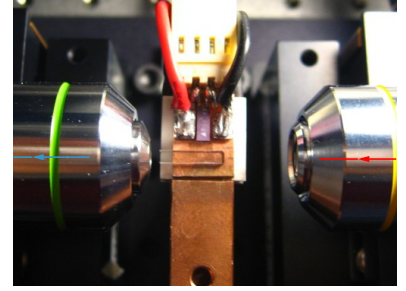
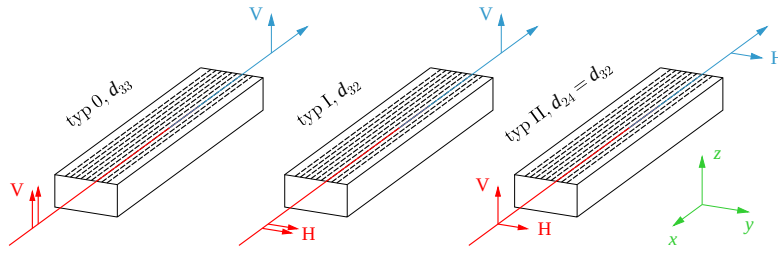
V nelineárním materiálu musíme vytvořit strukturu, kde se mění směr domény s periodou $\Lambda = 2L_c$, typicky 5-15 μm . Tato perioda je daná řešením podmínky $\Delta k L_c = \pi$. Tyto krystaly se proto nazývají *periodicky pólované*. Samotný krystal pak dodává k podmínce fázové synchronizace vlnový vektor $|\vec{K}| = 2\pi/\Lambda$. Tato metoda se hojně využívá u vlnovodných struktur, kde se z podstaty vlnovodného šíření musíme omezit na kolineární procesy. Podmínku kvazi fázové synchronizace pro SPDC [25, 26, 27, 28, 29] můžeme zapsat ve tvaru

$$\vec{k}_p = \vec{k}_s + \vec{k}_i + m\vec{K}, \quad \text{kde } m = 1, 2, \dots \quad (10.23)$$

Díky tomu, že vektor $\vec{K}$ představuje volný parametr, můžeme si navrhnout strukturu tak, aby v ní probíhal požadovaný proces při započítání celočíselného násobku vektoru $\vec{K}$. V naší laboratoři jsme používali PP-KTP s vlnovody dodané od firmy AdvR¹ s periodou pólování $\Lambda = 7.62 \mu\text{m}$. Zde probíhají procesy následovně: typ II - první řád ($m = 1$), typ 0 - druhý řád ($m = 2$), typ I - třetí řád ($m = 3$).

Vlnovody se vyrábějí obvykle v sérii. Na jednom vzorku krystalu (čipu) je vyrobeno řádově 50 vlnovodů, které jsou dostatečně vzdálené, aby bylo možné pomocí mikroskopových objektivů do jednotlivých

¹<http://www.adv-r-inc.com/>



Obr. 10.12: Typické experimentální uspořádání s vlnovodem KTP pro generaci druhé harmonické (800 nm + 800 nm → 400 nm). Vlevo je šipkami zakreslen směr polarizace vstupních polí (červeně) a SHG (modře). Vpravo je fotografie čipu umístěného na teplotně stabilizovaný prst, ke kterému směřují mikroskopové objektivy. Šipky naznačují směry šíření optických polí.

vlnovodů navazovat čerpací svazek nezávisle. Větší počet vlnovodů se dělá jednak proto, že výrobní proces je značně náročný a ne vždy se podaří dodržet požadovanou periodu a regularitu vlnovodu. Dalším důvodem je, že vlnovod má příčné rozměry $\approx 5\mu\text{m}$. Pokud se na vstupní nebo výstupní hraně vytvoří nějaký defekt, nedá se tento vlnovod již použít. Z celkového počtu vlnovodů na jednom čipu se pak dá pro praktické použití vybrat pouze několik vhodných. Naštěstí podmínku fázové synchronizace lze alespoň v malém intervalu ladit pomocí teplotní závislosti indexů lomu. Toho se využívá jak ve vlnovodech KTP, tak i v objemových krystalech lithium-niobátu, kde je závislost na teplotě obzvláště citlivá. Na druhou stranu má tato vlastnost i svá negativa. Pro udržení sfázování se musí vzorek stabilně udržovat na přesně dané teplotě.

Uspořádání atomů v krystalu KTP odpovídá ortorombické soustavě (kosočtverečná) s grupou symetrie $mm2 \equiv C_{2v}$. KTP je typický dvouosý materiál a proto jsme jeho indexy lomu ve viditelné oblasti a tvar jeho indexové plochy již diskutovali v kapitole 6 na str. 78. Symetrie krystalu je zodpovědná za tvar jeho tenzoru nelineární susceptibility:

$$\overset{3\leftrightarrow}{\chi}_{\text{KTP}} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \chi_{31} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \chi_{32} & \cdot & \cdot \\ \chi_{31} & \chi_{32} & \chi_{33} & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right). \quad (10.24)$$

V literatuře se udává velikost nenulových členů $\chi_{33} = 10.7 \text{ pm/V}$ a $\chi_{32} = 2.65 \text{ pm/V}$. Největší nelineární koeficient χ_{33} , který dává do interakce tři pole, která jsou všechna orientovaná ve směru krystalografické osy z tohoto materiálu, je zodpovědný za procesy typu 0. Typický příklad schématu pro generaci SHG nebo SPDC ve vlnovodu KTP ukazuje obr. 10.12. Volbou nastavení polarizace čerpání a navázaného módu je možné generovat všechny tři různé procesy typu 0, I i II. Poznátky o tomto PP-KTP jsme publikovali v článku [30], kde je možné dohledat i další základní reference z oblasti periodicky pólovaných materiálů.

10.5 Entanglement v polarizaci

Termín *entanglement* (kvantová provázanost) [31] je ryze kvantový jev, který nemá v klasické fyzice obdoby a je zásadní pro kvantovou informatiku i kvantové komunikace. Pro jednoduchost se omezme pouze na čisté stavy. Předpokládejme dva podsystémy v čistých stavech $|\Theta_1\rangle$ a $|\Theta_2\rangle$ (například dva fotony s přesně danou polarizací). Je třeba si uvědomit, že i jeden jediný foton může mít zcela přesně definovaný polarizační stav, jenž lze změřit pomocí stejného polarizačního děliče, který bychom použili pro měření polarizace světla s klasickou intenzitou. Nejsme-li schopni celkový stav systému obou fotonů separovat na součin stavů dvou částic $|\Theta\rangle = |\Theta_1\rangle \otimes |\Theta_2\rangle$, označujeme stav těchto dvou fotonů jako entanglovaný.

Vzniknou-li v nějakém procesu dvě entanglované částice, např. dva fotony v SPDC procesu, jsou provázané a musí být popisovány společně pomocí jediné vlnové funkce. Pokud na jedné částici provedeme měření, dojde ke kolapsu této společné vlnové funkce a druhá částice se vyprojektuje do určitého stavu v závislosti na výsledku měření na první částici. K tomuto efektu dojde i v případě, když jsou tyto dvě částice od sebe na kilometry daleko.

Předpokládejme jeden typický Bellův stav [32] fotonového páru, který je entanglovaný v polarizaci,

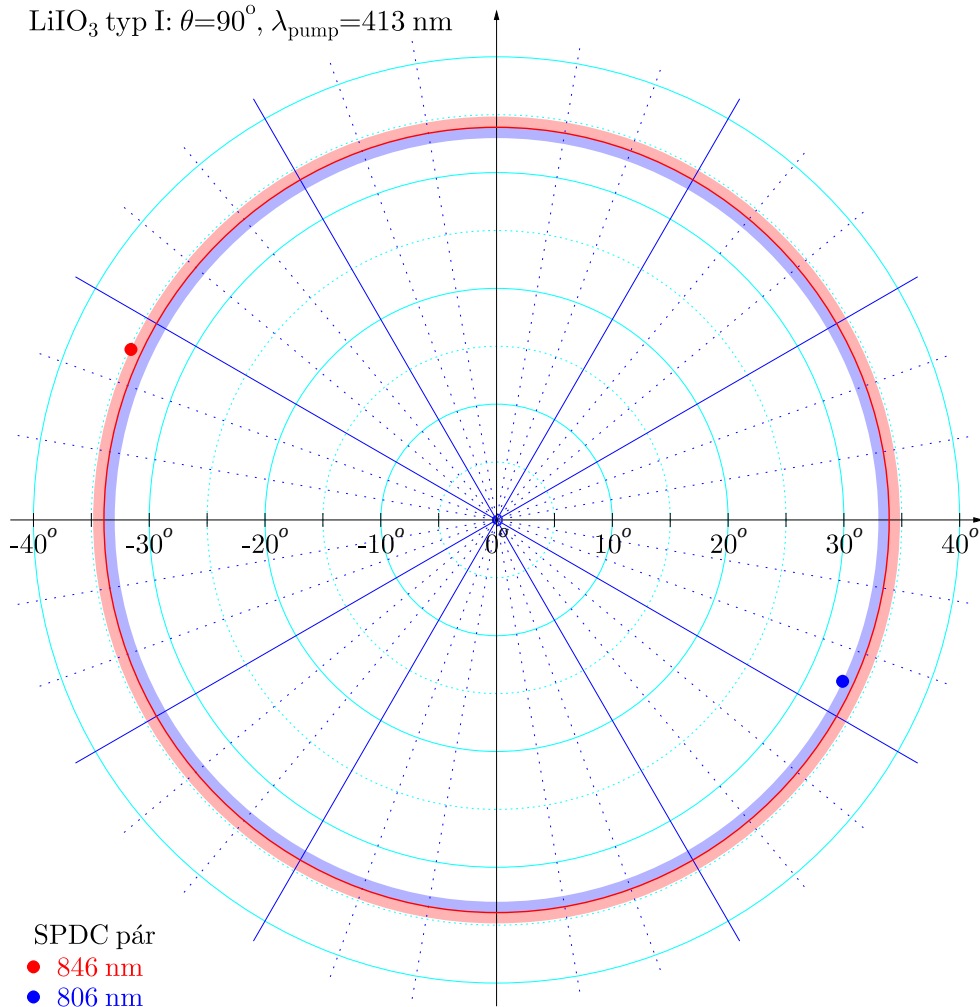
zapsaný jako

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{2} (|H_1\rangle|V_2\rangle - |V_1\rangle|H_2\rangle), \quad (10.25)$$

kde $|H\rangle$ a $|V\rangle$ představují dva na sebe kolmé stavy polarizace jednotlivých fotonů (horizontální a vertikální lineární polarizace) a indexy označují prostorový mód. Změříme-li, že první foton je polarizován například ve stavu $|H\rangle$, druhý foton bude mít polarizaci $|V\rangle$ a naopak. Před měřením nejsme schopni říci, jak bude který foton polarizován. O tom se rozhodne až v okamžiku měření na jedné z částic – *projekce*. Dopředu známe pouze pravděpodobnosti možných výsledků měření. V případě vyváženého stavu tak, jak je zapsán stav $|\Psi^-\rangle$, je pravděpodobnost výsledku $|H\rangle$, nebo $|V\rangle$ v poměru 50 %:50 %. Ačkoliv se na první pohled zdá, že kolaps vlnové funkce způsobuje šíření informace od měřené částice k té druhé částici nadsvětelnou rychlostí, samotný princip kolapsu vlnové funkce a entanglementu neporušuje princip kauzality. Nelze ho totiž použít k přenosu informace rychlostí větší, než je rychlost světla.

10.5.1 Typ I ($e \rightarrow o + o$)

Při nekolineárním procesu SPDC jsou generovány fotony v celém spektru s různými vlnovými délkami. Díky symetrii musí ležet jednotlivé spektrální komponenty generovaných fotonů na povrchu kuželu s osou ve směru čerpacího svazku, jak to ukazuje obr. 10.13. Podmínka fázové synchronizace tedy udává pro každou vlnovou délku generovaných fotonů jeden konkrétní vrcholový úhel kuželu. Chceme-li získat fotonové páry se stejnou vlnovou délkou obou fotonů, musíme vybírat pomocí clonek dvojice fotonů, které jsou emitovány na protilehlé strany povrchu kuželu, který odpovídá degenerované frekvenci $\omega_s = \omega_i = \omega_p/2 = \omega$.



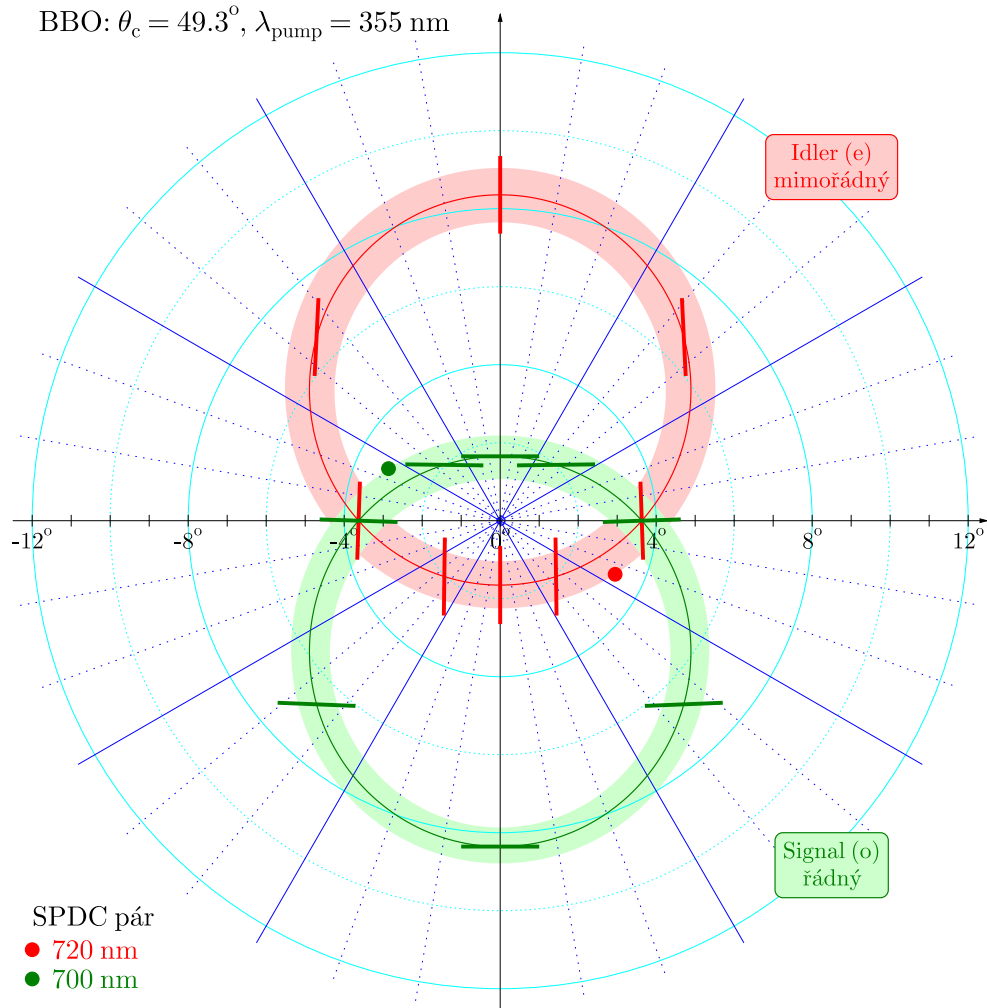
Obr. 10.13: Spektrum SPDC typu I generované v krystalu LiIO₃ při čerpání na vlnové délce 413 nm kolmo na osu krystalu. Úhly v obrázku jsou definovány vůči směru čerpacího svazku.

V kolineárním případě se kužel limitně zúží a přechází na polopřímku. Generované fotony vycházejí z krystalu stejným směrem jako čerpací svazek, což přináší obtíže s oddělením generovaného slabého signálu od silného čerpacího svazku. Polarizace nově vzniklých fotonů je v procesu typu I kolmá k polarizaci čerpacího svazku. Jedním krystalem typu I tedy nelze přímo generovat fotonové páry entanglované v polarizaci. Vzniká čistý stav $|HH\rangle$.

10.5.2 Typ II ($e \rightarrow o + e$)

V tomto případě dochází ke generaci dvou fotonů s polarizacemi na sebe navzájem kolmými. Fotony z páru opouští krystal ve směru povrchů dvou kuželů, které jsou symetrické vůči čerpacímu svazku. V závislosti na směru krystalických os nelineárního krystalu vůči rozhraní a směru dopadu čerpacího svazku rozlišujeme několik možností nekolineárního sfázování: a) kužely signálních a jalových fotonů se vůbec neprotínají, b) kužely se protínají v jediném místě, kterým ze symetrie musí být osa čerpacího svazku, c) kužely se protínají ve dvou směrech. Tento poslední případ je zobrazen na obr. 10.14. Dvoufotonový stav entanglovaný v polarizaci lze pozorovat v tom případě, když pomocí clonek vybíráme fotony právě z těchto průsečíků. Míra entanglementu je zde ale snížena částečnou spektrální rozlišitelností, protože navázaná spektra emitovaných fotonů jsou různá. To vyplývá z odlišné úhlové disperze obou fotonů, což je vidět z šířek kružnic v obr. 10.14. Zobrazená šířka odpovídá spektrální šířce 20 nm.

Pokud se podíváme na polarizaci generovaných fotonů, je zřejmé, že řádná polarizace musí být vždy kolmá na optickou osu. V zobrazeném případě, $\theta_c = 49.3^\circ$, optická osa protne rovinu, kde sledujeme vzdálené pole generovaných fotonů. Mimořádná polarizace musí směřovat k tomuto bodu a řádná polari-



Obr. 10.14: Spektrum SPDC typu II generované v krystalu BBO při čerpání na vlnové délce 355 nm, kat 49.3° . Úhly v obrázku jsou definovány vůči směru čerpacího svazku. Barevné proužky představují spektrální šířku 20 nm.

zace musí být k tomuto směru kolmá. Na tomto místě provedeme pro názornost výpočet směrů polarizace.

Př. 10.5: Výpočet polarizace fotonových párů SPDC v BBO typu II:

V tomto příkladu chceme shrnout výpočty, které jsou nutné pro vykreslení obr. 10.14. Bude nutné pracovat s vektory ve dvou soustavách. V čárkované laboratorní soustavě je směr čerpacího laseru v ose x'_3 . V příčné rovině je horizontální směr x'_1 a vertikální směr vzhůru x'_2 .

Nečárkovaná soustava je spojena s prvky symetrie krystalu. Optická osa krystalu $\vec{z}$ je shodná se směrem osy x_3 a je skloněná o úhel θ_c vůči směru procházejícího čerpacího laserového svazku. Protože popisujeme proces typu II v BBO, kde je optimální efektivita tohoto procesu pro $\phi = 0$, splývá horizontální osa x_1 s x'_1 . Transformační matice je tedy pouze rotace $\vec{x}' = \vec{R}(\theta_c) \cdot \vec{x}$. Přejít mezi souřadnými soustavami si můžeme ukázat na příkladu transformace optické osy,

$$\vec{z}' = \vec{R}(\theta_c) \cdot \vec{z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_c & \sin \theta_c \\ 0 & -\sin \theta_c & \cos \theta_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (0, \sin \theta_c, \cos \theta_c).$$

Nyní vyřešíme PMC podmínku (10.18) a pro vybraný úhel sklonu ξ vůči horizontální rovině získáme jednotkový vlnový vektor idleru a úhel α_e odklonu od osy čerpacího svazku (viz obr. 10.15).

$$\vec{k}'_e \propto \vec{s}'_e = (\cos \xi \sin \alpha_e, \sin \xi \sin \alpha_e, \cos \alpha_e), \quad \text{lab. soustava.}$$

Abychom mohli určit index lomu idleru, je nutné znát úhel který svírá k -vektor s optickou osou. Skalární součin obou vektorů zapsaný v laboratorní soustavě nám dává kosinus tohoto úhlu θ ,

$$\cos \theta = \vec{s}'_e \cdot \vec{z}' = \sin \xi \sin \alpha_e \sin \theta_c + \cos \alpha_e \cos \theta_c.$$

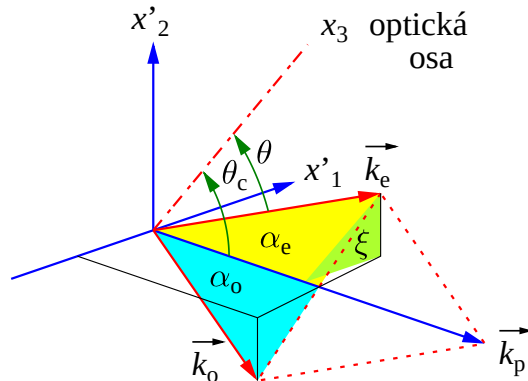
Walk-off

Protože idler má mimořádnou polarizaci, je potřeba dopočítat jeho dvojlom. U jednoosého negativního krystalu BBO dojde vůči $\vec{k}_e \parallel \vec{s}_e$ k odklonu Poyntingova vektoru od optické osy. V hlavní rovině leží optická osa, vektor $\vec{k}_e$ skloněný o úhel θ i Poyntingův vektor odkloněný o úhel dvojlomu ρ . Odklon Poyntingova vektoru od optické osy je tedy daný rozdílem obou úhlů $(\theta - \rho)$, jak bylo diskutováno v sekci 5.5 s výsledným vztahem (5.21). Pro jistotu tento vztah zopakujeme

$$\theta - \rho = \arctan \left[(n_o/n_e)^2 \tan \theta \right]$$

Dvojlom se snáze počítá v soustavě symetrie krystalu (nečárkovaná soustava). Hlavní rovina je pootočená vůči optické ose o úhel ψ , takže můžeme zapsat přepočtený vlnový vektor do os krystalu následovně

$$\vec{s}_e = \vec{R}(-\theta_c) \cdot \vec{s}'_e \Rightarrow \begin{pmatrix} \cos \psi \sin \theta \\ \sin \psi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \alpha_e \cos \xi \\ \sin \alpha_e \sin \xi \cos \theta_c - \cos \alpha_e \sin \theta_c \\ \sin \alpha_e \sin \xi \sin \theta_c + \cos \alpha_e \cos \theta_c \end{pmatrix}. \quad (10.26)$$



Obr. 10.15: Označení úhlů popisujících prostorovou geometrii SPDC v jednoosém krystalu: ξ – zvolený úhel sklonu pro výpočet úhlů α_e, α_o .

Úhel ψ lze nyní určit z poměru prvních dvou složek,

$$\frac{\sin \psi}{\cos \psi} = \frac{\sin \alpha_e \sin \xi \cos \theta_c - \cos \alpha_e \sin \theta_c}{\sin \alpha_e \cos \xi}.$$

Ted' již můžeme zapsat jednotkový vektor ve směru Poyntingova vektoru idleru,

$$\vec{S}_e = (\cos \psi \sin(\theta - \rho), \sin \psi \sin(\theta - \rho), \cos(\theta - \rho)), \quad \text{soustava symetrie krystalu,}$$

který si vynásobením s maticí rotace převedeme do laboratorní soustavy.

Idler

Polarizaci idleru určíme ze znalosti, že elektrické pole $\vec{D}_e$ musí kmitat v rovině dané optickou osou $\vec{z}$ a směrem $\vec{s}$. Jednotkový vektor ve směru polarizace označujeme $\vec{p}_e$. Můžeme ho tedy zapsat jako lineární kombinaci obou vektorů, $\vec{p}_e = a\vec{z} + b\vec{s}_e$. Víme že elektrické pole kmitá kolmo na směr vlnového vektoru, $\vec{p}_e \perp \vec{s}_e$. Takže $\vec{p}_e \cdot \vec{s}_e = 0$. Po dosazení dostaneme řešení

$$\vec{p}_e \propto \vec{z} - \cos \theta \vec{s}_e,$$

které musí platit v libovolné vztažené soustavě. Výsledek je sice nenormovaný, ale směr je správný.

Signál

Signální foton je řádný a má tedy vlnový vektor ve směru Poyntingova vektoru. V laboratorní soustavě je můžeme zapsat:

$$\vec{S}'_o \parallel \vec{s}'_o = (-\cos \xi \sin \alpha_o, -\sin \xi \sin \alpha_o, \cos \alpha_o).$$

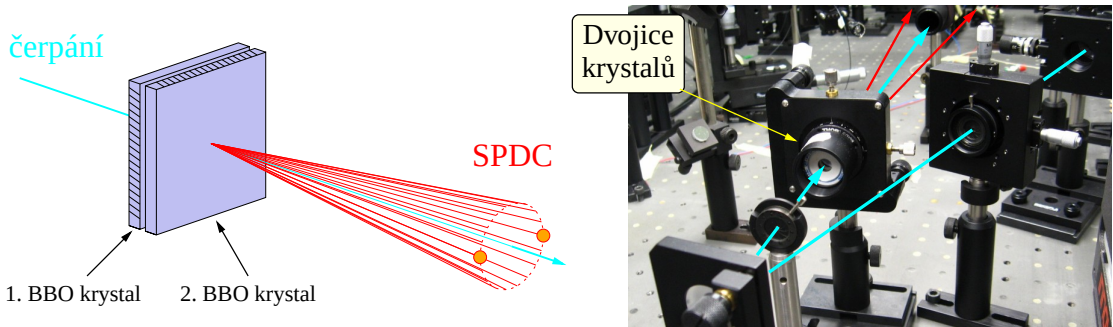
Jednotkový vektor ve směru řádné polarizace $\vec{D}_o$ můžeme spočítat jednoduše jako vektorový součin vlnového vektoru a směru osy,

$$\vec{D}_o \propto \vec{p}_o = \vec{s}'_o \times \vec{z}'.$$

Shrnutí

Výsledek lze shrnout následovně: 1) Fotony, které jsou generované daleko od hlavní roviny čerpacího laseru, mají polarizace o pár stupňů pootočené vůči horizontálnímu a vertikálnímu směru. 2) Dvojlom způsobí odklon šíření idleru od optické osy, což způsobí to, že degenerované SPDC fotony se uvnitř BBO krystalu šíří prakticky po stejném kuželu. 3) Pokud uvažujeme krystal dlouhý 1 mm, vytvoří fotonové páry na konci krystalu kolečko o průměru přibližně 20 μm .

10.5.3 Kwiatův zdroj entanglovaných fotonových párů



Obr. 10.16: Schéma uspořádání dvou krystalů BBO ve zdroji entanglovaných párů podle P. G. Kwiat. Směr optické osy je naznačen na boční straně krystalu.

P. G. Kwiat navrhnul experimentální uspořádání pro efektivnější generaci polarizačně entanglovaných fotonových párů [33, 34]. Umístil za sebe dva totožné krystaly typu I vzájemně otočené o 90° , viz obr. 10.16. Každý z krystalů může být buzen pouze lineární složkou polarizace čerpacího svazku, která odpovídá mimořádné polarizaci. Tento směr lineární polarizace tedy leží v hlavní rovině krystalu. Takto se označuje rovina určená směrem vektoru $\vec{k}$ a optickou osou krystalu. Pokud je dvojice krystalů čerpána laserovým svazkem s obecně eliptickou polarizací, budou jednotlivé krystaly generovat fotony v poměru rozkladu intenzity vstupní polarizace čerpacího svazku do horizontálního a vertikálního směru. Generace může probíhat v obou krystalech současně. Jsou-li krystaly dostatečně tenké, dráhy vygenerovaných fotonů se překrývají. Díky tomu pak nelze po detekci fotonu určit, ve kterém z krystalů fotonový pár vzniknul. Generované fotonové páry mají polarizaci popsanou koherentním součtem příspěvků $|HH\rangle$ z jednoho a $|VV\rangle$ z druhého krystalu. Tímto způsobem lze generovat přímo polarizačně entanglované stavy,

$$|\Phi\rangle = \cos\alpha|HH\rangle + e^{i\beta}\sin\alpha|VV\rangle. \quad (10.27)$$

Parametry α a β závisí na polarizaci čerpacího svazku. Poměr mezi $|HH\rangle$ a $|VV\rangle$ složkami ovlivňuje parametr α , který je možno plynule měnit rotací půlvlnné destičky (HWP) v čerpacím svazku. Parametr β označuje fázový člen, který lze ovlivnit náklonem čtvrtvlnné destičky (QWP). Je-li $\alpha = 0$ nebo $\alpha = \pi$, potom generuje fotonové páry vždy jen jeden krystal a výsledkem jsou separabilní stavy. V případě $\alpha = \pi/2$ generují fotonové páry oba krystaly stejnou měrou, což umožňuje vytvořit dva maximálně entanglované Bellovy stavy.

$$|\Phi^\pm\rangle = (|HH\rangle \pm |VV\rangle) / \sqrt{2}. \quad (10.28)$$

Druhé dva Bellovy stavy lze získat z (10.28) otočením polarizace jednoho z generovaných fotonů pomocí půlvlnné fázové destičky s osou pod úhlem 45° .

$$|\Psi^\pm\rangle = (|HV\rangle \pm |VH\rangle) / \sqrt{2}. \quad (10.29)$$

Při nastavení α v intervalu mezi těmito limitními hodnotami se generují stavy částečně entanglované.

10.6 Shrnutí

- Rozvoj nelineární optiky byl umožněn díky rozvoji laserové techniky. Nelineární optika zpětně pomáhá v laserové technice generovat světlo požadované barvy.
- Pro popis nelineárních procesů je nejprve nutné zavést komplexní parametry prostředí a přejít ke frekvenčním složkám polí. Dále je nutné odvodit závislost indexu lomu v oblasti normální disperze. Nakonec je nutné popsat anizotropii nelineárních krystalů a symetrii tenzoru nelineární susceptibility.
- Nelineární vlnová rovnice se odvozuje typicky v neabsorbujícím prostředí.
- Zákon zachování energie a hybnosti se v nelineárních procesech spojují do podmínky fázové synchronizace.
- Efektivita nelineárního procesu je mimo jiné závislá na geometrickém uspořádání, které lze popsat pomocí různých úhlů vzájemného natočení.
- V periodicky pólovaných materiálech přibude do podmínky fázové synchronizace vlnový vektor odpovídající periodě prostředí. Název nového vztahu je podmínka kvazi fázové synchronizace. Typicky jde o feroelektrické materiály jako je KTP s periodickým střídáním domén.
- SPDC se typicky používá ke generaci kvantově korelovaných, entanglovaných fotonových párů.

10.7 Příklady

Př. 10.6: Mimořádný index lomu jednoosého krystalu:

Ze vztahů odvozených pro indexový elipsoid jednoosého krystalu v kapitole 5 odvoďte alternativní vztah pro úhlovou závislost indexu lomu mimořádného svazku (10.16).

Př. 10.7: Úhly SPDC typu I v BBO:

Využijte Sellmeierovy vztahy (10.15) a rovnici (10.17) pro výpočet vnitřního úhlu parametrické sestupné konverze typu I v materiálu BBO. S využitím Snellova zákona pak dopočítejte úhel svazku SPDC za krystalem. Výsledek namalujte do grafu ve vhodném programu na počítači.

Nápověda: Výsledek by se měl shodovat s obr. 10.5.

Př. 10.8: Úhly katu pro SPDC v BBO:

S využitím vztahů odvozených v této kapitole spočítejte mezní úhel katu θ_c , při kterém je SPDC v BBO materiálu kolineární. Výpočet proveďte pro proces typu I a II. Čerpací vlnová délka nechte je: a) 355 nm, b) 400 nm,

Nápověda: Výsledek pro 355 nm si můžete zkontrolovat podle obr. 10.4.

Příloha A

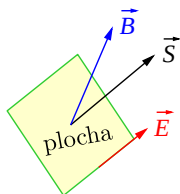
Fyzikální dodatek

A.1 Maxwellovy rovnice pro elektromagnetické pole

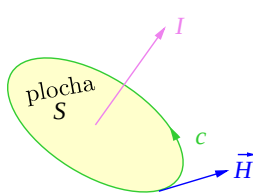
Název *Maxwellovy rovnice* se používá pro čtyři rovnice, které dávají do vzájemného vztahu elektrické a magnetické jevy, a vytvářejí úplný klasický popis elektromagnetického pole. Tyto rovnice se často zapisují v diferenciálním tvaru (1.1), který byl uveden hned v první kapitole na str. 7.

Tyto rovnice se odvozují podrobně v základních učebnicích fyziky v části věnované elektřině a magnetizmu. V učebnicích optiky [2, 3, 4, 7] se Maxwellovy rovnice již neodvozují, ale pouze se uvedou jako známé a dále se s nimi pracuje. My zde podrobné odvozování nebudeme uvádět, pouze pro úplnost připomeňme integrální tvar Maxwellových rovnic. V integrálním tvaru mají rovnice blíže k reálným experimentům, protože pracují s makroskopickými náboji a proudy. V této sekci budeme používat geometrické relace podle obr. A.1.

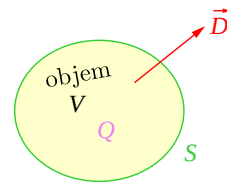
a) Faradayův zákon



b) Ampérův zákon



c) Gaussův zákon



Obr. A.1: Vektory pole, plochy, objemy a jejich hranice, které se vyskytují v Maxwellových rovnicích.

Faradayův zákon popisuje elektromagnetickou indukci,

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (\text{A.1})$$

Zavedeme si magnetický indukční tok $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$, který protéká orientovanou plochou $\vec{S}$. Přintegrujeme přes tuto plochu a použijeme Stokesovu větu o přechodu od plošného integrálu po ploše S k integrálu po křivce c , která plochu ohraničuje, $\int_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l}$. Takto dostaneme integrální tvar první rovnice

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\Phi = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}. \quad (\text{A.2})$$

Ampérův zákon popisuje fakt, že proudy generují magnetické pole,

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (\text{A.3})$$

Opět přintegrujeme levou i pravou stranu rovnice přes plochu $\vec{S}$ a s pomocí Stokesovy věty pro rotaci magnetické intenzity, $\int_S \nabla \times \vec{H} \cdot d\vec{S} = \oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l}$, dostaneme integrální tvar druhé rovnice,

$$\boxed{\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = I + \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S}.} \quad (\text{A.4})$$

Členy na pravé straně mají význam proudu, I je proud volných nábojů a druhý člen nazýváme Maxwellův posuvný proud.

Jaké magnetické pole generuje ve vzdálenosti r přímý vodič, kterým teče proud I ?

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = B 2\pi r = \mu I \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mu}{2\pi} \frac{I}{r}. \quad (\text{A.5})$$

Síla, kterou by magnetické pole působilo na testovací vodič s proudem $\vec{i}$, se vypočte ze vztahu $\vec{F} = \vec{i} \times \vec{B}$.

Gaussův zákon se někdy označuje též Coulombův zákon, protože popisuje elektrické pole, které generují elektrické náboje s hustotou ρ ,

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho. \quad (\text{A.6})$$

Provedeme-li integraci, dostaneme celkový náboj Q ve zkoumané oblasti. Dále použijeme Gaussovu větu o přechodu objemového integrálu z divergence na plošný integrál, $\int_V \nabla \cdot \vec{D} dV = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$. Jako obvykle plocha S ohraničuje objem V . Dostaneme výsledný integrální vztah pro třetí Maxwellovu rovnici

$$\boxed{\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q = \int_V \rho dV.} \quad (\text{A.7})$$

Jaké elektrické pole bude generovat bodový náboj? Pro bodový náboj, který bychom uzavřeli do pomyslné koule o poloměru r , musí platit

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{Q}{r^2}. \quad (\text{A.8})$$

Síla, kterou by působilo elektrické pole na testovací náboj q , se vypočte podle vztahu $\vec{F} = q\vec{E}$.

Spojitost indukčního toku je poslední čtvrtá Maxwellova rovnice a znamená neexistenci magnetických monopolů, $\nabla \cdot \vec{B} = 0$. Po integraci to vede ke vztahu

$$\boxed{\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0.}$$

Můžeme říci, že tok magnetického pole uzavřenou plochou je vždy nulový. Co na jedné straně přiteče, to musí druhou stranou odtéci.

A.1.1 Spojitost elektromagnetických polí na rozhraní

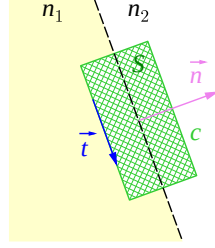
Maxwellovy rovnice a z nich získaná vlnová rovnice popisuje šíření světla v prostředí s daným indexem lomu. Dalším krokem je popis chování elektromagnetického pole na rozhraní dvou pro jednoduchost izotropních materiálů s indexy lomu n_1 a n_2 . Normálu k tomuto rozhraní označme $\vec{n}$.

Tečné složky intenzit

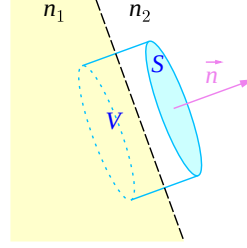
Jako první budeme řešit elektrickou intenzitu, která má v jednotlivých materiálech velikost $\vec{E}_1$ a $\vec{E}_2$. Zintegrujeme Faradayův zákon přes plochu, která prochází rozhraním, jak to ukazuje obr. A.2a). Pomocí Stokesovy věty zmíněné v předchozím textu této přílohy již dvakrát nahradíme integrál z rotace přes zeleně šrafovanou plochu S integrálem podél obvodu této plochy c .

$$\int_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}.$$

a) spojitost tečných složek



b) spojitost normálových složek



Obr. A.2: a) Integrační plocha pro výpočet spojitosti tečných složek intenzit. b) Integrační objem pro výpočet spojitosti normálových složek indukce.

Provedeme limitu, kdy šířka integračního obdélníku se bude blížit k nule. Velikost plochy S půjde k nule a díky tomu půjde k nule i plošný integrál z derivace magnetického pole. Integrál podél křivky c přejde na integraci podél delších stran obdélníku. Tím dostaneme $(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \vec{t} = 0$, kde vektor $\vec{t}$ je tečný vektor podél rozhraní. Protože směr tečného vektoru je libovolný v 2D ploše rozhraní, lze spojitost tečných složek elektrického pole zapsat obecně tak, že se na rozhraní dvou materiálů může měnit pouze normálová složka elektrické intenzity.

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \times \vec{n} = 0.$$

Nyní bychom mohli analogicky zintegrovat Ampérův zákon. Rozdíl je pouze v tom, že v Ampérově zákonu vystupuje navíc ještě proud. Výsledný vztah pro spojitost tečných složek magnetické intenzity proto vypadá následovně,

$$(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \times \vec{n} = \vec{j}_S,$$

kde $\vec{j}_S$ představuje hustotu povrchového proudu. Pro dielektrika je ale tento proud nulový a i magnetická intenzita má tedy na rozhraní dvou dielektrik spojitě své tečné složky $\vec{H}_1$ a $\vec{H}_2$.

Normálové složky indukce

Nyní vyjdeme z Gaussova-Coulombova zákona. Ten budeme integrovat v objemu válce V , který je v obr. A.2b) zakreslen modře. Podstava válce, jenž prochází rozhraním, představuje plochu S . Využijeme Gaussovu větu pro přechod integrálu z divergence na plošný integrál po hranici integračního objemu.

$$\int_V \nabla \cdot \vec{D} \, dV = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho \, dV.$$

Opět limitně snížíme výšku integračního válce k nule. Díky tomu se objemový integrál zmenší na nulu a plošný integrál bude integrací pouze přes horní a dolní podstavu válce. Takto odvodíme spojitost normálových složek elektrické indukce na rozhraní. Nespojitost by mohl způsobit pouze povrchový náboj s hustotou ρ_S na rozhraní v ploše S .

$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{n} = \rho_S.$$

Samozřejmě u dielektrik, kde je povrchový náboj nulový, jsou normálové složky indukce na rozhraní spojitě.

Obdobně můžeme postupovat i se čtvrtou Maxwellovou rovnicí a dostali bychom analogicky pro magnetickou indukci následující vztah,

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n} = 0.$$

Uvedené čtyři podmínky na rozhraní nejsou nezávislé, protože elektromagnetická pole jsou svázaná Maxwellovými rovnicemi. Proto stačí splnit dvě podmínky pro tečné komponenty a díky splnění Maxwellových rovnic v obou prostředích oddělených rozhraním budou automaticky splněny i další dvě podmínky pro normálové složky [35].

A.2 Rozdělení látek podle materiálových vztahů

Zapišme si obvyklé materiálové vztahy, které jsou nezbytné pro řešení Maxwellových rovnic,

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}(\vec{E}), & \vec{P} &= \varepsilon_0 \overleftrightarrow{\chi}_e \vec{E}, \\ \vec{B} &= \mu_0 \vec{H} + \vec{M}(\vec{H}), & \vec{M} &= \mu_0 \overleftrightarrow{\chi}_m \vec{H}.\end{aligned}$$

Látky můžeme dělit podle různých kritérií. Ukažme si to na příkladu pěti druhů dělení magnetických vlastností látek. Obdobně se to dá zavést i pro elektrické vlastnosti.

1. kritérium popisuje to, zda je látka bez působení vnějšího magnetického pole permanentní magnet,

- magneticky měkké, $\vec{M}_0 = 0$
- magneticky tvrdé, $\vec{M}_0 \neq 0$, spontánní magnetizace (bez vnějšího pole)

2. kritérium popisuje linearitu odezvy na vnější pole

- lineární, $M \propto H$
- nelineární, $M \propto f(H, H^2) + \text{vyšší členy}$

3. kritérium zkoumá, zda mají různá místa materiálu různé vlastnosti

- homogenní, χ_m není funkcí polohy $\vec{r}$
- nehomogenní, $\chi_m(\vec{r})$, často se řeší vrstevnaté nebo planární struktury

4. kritérium popisuje závislost vlastností materiálu na frekvenci vnějšího pole

- disperzní (funkce odezvy) $\Rightarrow \chi_m(\omega)$
- nedisperzní (bez zpoždění, odezva ihned, pro pomalé vnější pole, kvazistatické přiblížení)

5. kritérium zkoumá, zda má materiál různé vlastnosti v různých směrech

- izotropní, susceptibilita je číslo $\overleftrightarrow{\chi}_m = \chi_m \mathbb{I}$, $\vec{H} \parallel \vec{B}$
- anizotropní, $\overleftrightarrow{\chi}_m$ je skutečný tenzor, $\vec{H} \nparallel \vec{B}$

Například pro magneticky měkké lineární homogenní a izotropní prostředí bez disperze budou materiálové vztahy následující

$$\begin{aligned}\overleftrightarrow{\varepsilon} &= \varepsilon \mathbb{I}, & \vec{D} &= \varepsilon \vec{E}, \\ \overleftrightarrow{\mu} &= \mu \mathbb{I}, & \vec{B} &= \mu \vec{H}.\end{aligned}$$

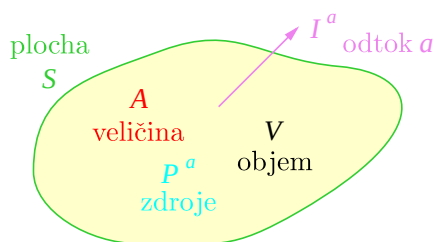
Relativní konstanty prostředí budou $\varepsilon_r = 1 + \chi_e$, $\mu_r = 1 + \chi_m$.

Projevem toho, že zdrojem elektromagnetických polí jsou elektrické náboje a jejich pohyb, je to, že vektor polarizace $\vec{P}$ směřuje přibližně ve směru vektoru elektrického pole $\vec{E}$ (není v protisměru). Proto musí platit $\chi_e \geq 0$; $\varepsilon_r \geq 1$.

Pro magnetické vlastnosti to tak není, magnetická susceptibilita může být i záporná. Můžeme říci, že odezva na magnetické pole je:

bud' lineární $\begin{cases} \chi_m < 0 & \text{diamagnetika,} \\ \chi_m > 0 & \text{paramagnetika,} \end{cases}$
nebo nelineární, $\chi_m \gg 0$ feromagnetika.

A.3 Globální zákony zachování



Obr. A.3: Zákon zachování veličiny A v prostorové oblasti o objemu V ohraničené plochou S .

V přírodě platí zákony zachování mnoha veličin. Z principu je tedy možné si odvodit obecný zákon zachování nějaké veličiny s objemovou hustotou a . Zákon zachování si můžeme vyjádřit v diferenciálním tvaru ve zvoleném bodě prostoru. Nebo si můžeme spočítat integrální zákon zachování veličiny A v objemu V , jak to ukazuje obr. A.3. Mezi těmito veličinami platí integrálně diferenciální vztahy,

$$a = \frac{dA}{dV}, \quad A = \int_V a dV.$$

Je potřeba si definovat další dvě veličiny. První je hustota zdrojů p^a , jejíž objemový integrál nám určuje, kolik vznikne veličiny A v objemu V za jednotku času (1 s).

$$P^a = \int_V p^a dV.$$

Velichina A může ze zkoumaného objemu také vytékat. Proto je druhou důležitou veličinou hustota toku $\vec{j}^a$. Pokud chceme určit, kolik této veličiny A vyteče z objemu V za jednotku času, musíme si definovat plochu rozhraní S , přes kterou tok zintegrujeme. Celkový tok bude

$$I^a = \oint_S \vec{j}^a \cdot d\vec{S}.$$

Zákon zachování zapíšeme ve tvaru

$$\frac{dA}{dt} + I^a = P^a,$$

který znamená toto: Zdroje vytvoří za jednotku času P^a množství veličiny A v objemu V . První část této veličiny způsobí přírůstek v daném objemu a druhá část vyteče přes hranici z tohoto objemu ven. Pokud do rovnice dosadíme předchozí výrazy, dostaneme

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial a}{\partial t} dV + \oint_S \vec{j}^a \cdot d\vec{S} &= \int_V p^a dV, \\ \int_V \frac{\partial a}{\partial t} dV + \int_V \nabla \cdot \vec{j}^a dV &= \int_V p^a dV. \end{aligned}$$

Při tomto odvození jsme použili Gaussovu větu o přechodu z plošného na objemový integrál. Má-li platit tento integrální vztah pro jakýkoliv objem, musí platit rovnost i pro integrované veličiny. Diferenciální zákon zachování má tedy tvar

$$\boxed{\frac{\partial a}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j}^a = p^a.} \quad (\text{A.9})$$

Obdobně bychom postupovali i v případě odvozování zákona zachování vektorové veličiny $\vec{a}$. Pro vektorovou veličinu bychom odvodili analogický výraz

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial t} + \nabla \cdot \overleftarrow{j}^{\vec{a}} = p^{\vec{a}}.$$

A.3.1 Zákon zachování energie pro elektromagnetické pole

Začneme tím, že si napočítáme divergenci Poyntingova vektoru,

$$\nabla \cdot \vec{S} = \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot \nabla \times \vec{E} - \vec{E} \cdot \nabla \times \vec{H} = - \left(\vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) - \vec{E} \cdot \vec{j}.$$

Nejdříve jsme rozepsali derivaci součinu tak, aby se derivovala pouze jedna proměnná napravo od symbolu ∇ . Potom jsme za rotace polí dosadili první a druhou Maxwellovu rovnici. Pro látky s lineárními materiálovými vztahy, $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$, lze použít definici hustoty elektromagnetické energie a její časové derivace,

$$w = \frac{1}{2}(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}), \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Zavedený Poyntingův vektor $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ značí tok energie z daného objemu. Takto můžeme zapsat zákon zachování elektromagnetické energie v obvyklém tvaru (A.9) a identifikovat jednotlivé členy,

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} = -\vec{j} \cdot \vec{E}.$$

Zde první člen značí změnu energie pole ve zkoumané oblasti, druhý člen popisuje výtok elektromagnetické energie ze zkoumaného místa. Pravá strana je zodpovědná za Coulombovské teplo, ve které se elektromagnetické pole může měnit v absorbujícím prostředí.

A.3.2 Hustota elektrické a magnetické energie

Ukažme si nyní, že hustota elektrické energie w_e a hustota magnetické energie w_m jsou pro elektromagnetické pole stejné. Použijeme první Maxwellovu rovnici (1.1) a spočítáme si derivace pro rovinnou monochromatickou vlnu,

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad i\vec{k} \times \vec{E} = i\omega\mu\vec{H}.$$

Nyní použijeme vztah pro podíl $k/\omega = n/c = \sqrt{\varepsilon\mu}$ s tím, že budeme uvažovat kolmost vektorů a dále budeme počítat již pouze jejich velikosti. Takto dostaneme pro elektromagnetické pole důležitý vztah pro podíl elektrického a magnetického pole,

$$\boxed{\sqrt{\varepsilon}E = \sqrt{\mu}H.} \quad (\text{A.10})$$

Díky této rovnosti nám hned vychází rovnost elektrické a magnetické složky hustoty elektromagnetické energie,

$$\left. \begin{aligned} w_e &= \frac{1}{2}\vec{E} \cdot \vec{D} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 \\ w_m &= \frac{1}{2}\vec{H} \cdot \vec{B} = \frac{1}{2}\mu H^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow w_e = w_m. \quad (\text{A.11})$$

A.3.3 Anizotropní prostředí

Ukažme si, jaké podmínky musí splňovat tenzor permitivity v anizotropním prostředí. Hustota energie se zde spočítá podle

$$w_e = \frac{1}{2}\vec{E} \cdot \vec{D} = \frac{1}{2}\varepsilon_{0ij}E_iE_j = \frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{E} \cdot \overleftrightarrow{\varepsilon} \cdot \vec{E}.$$

Časová derivace hustoty energie bude

$$\frac{\partial w_e}{\partial t} = \dot{w}_e = \frac{1}{2}\varepsilon_{0ij}[\dot{E}_iE_j + E_i\dot{E}_j].$$

Díky tomu, že můžeme prohazovat pořadí derivací, musí platit $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$. Pro neabsorbující prostředí s komplexní permitivitou $\tilde{\varepsilon}$, tj. v případě cirkulární anizotropie, platí obecnější podmínka: $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}^*$.

A.4 Odvození indexu lomu mimořádného svazku

V sekci 5.4 jsme zavedli vlastní stavy polarizace v jednoosém krystalu. Zatímco řádný svazek má index lomu vždy n_o , mimořádný svazek má index lomu závislý na směru daném úhlem θ podle (5.16), který zde zopakujeme,

$$n_e^2(\theta) = \varepsilon_B - \frac{\varepsilon_D^2}{\varepsilon_C}.$$

Úhel θ je odklon směru vlnového vektoru $\vec{k}$ od optické osy. Za pomocné parametry ε_B , ε_C a ε_D , které jsme si zavedli ve vztahu (5.14), dosadíme z textu kap. 5 a odvodíme si výsledný vzorec.

$$\begin{aligned} n_e^2(\theta) &= \varepsilon_1 \cos^2 \theta + \varepsilon_3 \sin^2 \theta - \frac{((\varepsilon_1 - \varepsilon_3) \sin \theta \cos \theta)^2}{\varepsilon_1 \sin^2 \theta + \varepsilon_3 \cos^2 \theta} \\ &= \frac{(\varepsilon_1 \cos^2 \theta + \varepsilon_3 \sin^2 \theta)(\varepsilon_1 \sin^2 \theta + \varepsilon_3 \cos^2 \theta) - ((\varepsilon_1 - \varepsilon_3) \sin \theta \cos \theta)^2}{\varepsilon_1 \sin^2 \theta + \varepsilon_3 \cos^2 \theta} \\ &= \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_3 (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) + 2\varepsilon_1 \varepsilon_3 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{\varepsilon_1 \sin^2 \theta + \varepsilon_3 \cos^2 \theta} \\ &= \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_3 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)^2}{\varepsilon_1 \sin^2 \theta + \varepsilon_3 \cos^2 \theta} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_3}{\varepsilon_1 \sin^2 \theta + \varepsilon_3 \cos^2 \theta} \\ &= \frac{1}{\sin^2 \theta / \varepsilon_3 + \cos^2 \theta / \varepsilon_1}. \end{aligned}$$

Nyní dosadíme hlavní indexy lomu ($\varepsilon_1 = n_o^2$, $\varepsilon_3 = n_e^2$) a dostaneme finální vztah (5.17) z textu kapitoly,

$$\boxed{\frac{1}{n_e^2(\theta)} = \frac{\sin^2 \theta}{\varepsilon_3} + \frac{\cos^2 \theta}{\varepsilon_1} = \frac{\sin^2 \theta}{n_e^2} + \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2}.$$

A.5 Odvození indexové plochy z Fresnelovy rovnice

V sekci 6.2 jsme si z Fresnelovy rovnice odvodili vztah pro vlastní hodnoty indexu lomu. Nyní podrobně probereme postup, kterým se z řešení nulovosti následujícího determinantu dostane rovnice indexové plochy (6.1).

$$\Delta = \begin{vmatrix} n_1^2 - (1 - s_1^2)N^2 & s_1 s_2 N^2 & s_1 s_3 N^2 \\ s_1 s_2 N^2 & n_2^2 - (1 - s_2^2)N^2 & s_2 s_3 N^2 \\ s_1 s_3 N^2 & s_2 s_3 N^2 & n_3^2 - (1 - s_3^2)N^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{A.12})$$

Řešení spočívá v tom, že pro směr šíření zadaný jednotkovým vektorem $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3)$ najdeme vlastní číslo (hledaný index lomu N) tak, aby byla splněna rovnice (A.12). Normovací podmínka pro jednotkový vektor zní: $|\vec{s}| = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 1$.

Při výpočtu determinantu získáme násobením diagonálních členů násobky $\{1, N^2, N^4, N^6\}$ – část I, pak získáme tři záporné příspěvky (jeden člen na diagonále krát dva členy mimo diagonálu) $\{N^4, N^6\}$ – část II. Nakonec zbývají dva kladné příspěvky, které vzniknou násobením členů mimo diagonálu $\{N^6\}$ – část III. Zapišme si nyní jednotlivé části determinantu:

část I

$$\begin{aligned} n_1^2 n_2^2 n_3^2 &+ N^2 [(s_1^2 - 1)n_2^2 n_3^2 + (s_2^2 - 1)n_1^2 n_3^2 + (s_3^2 - 1)n_1^2 n_2^2] \\ &+ N^4 [n_1^2 (s_2^2 - 1)(s_3^2 - 1) + n_2^2 (s_1^2 - 1)(s_3^2 - 1) + n_3^2 (s_1^2 - 1)(s_2^2 - 1)] \\ &+ N^6 (s_1^2 - 1)(s_2^2 - 1)(s_3^2 - 1) \end{aligned}$$

část II

$$\begin{aligned} &- N^4 (n_1^2 s_2^2 s_3^2 + n_2^2 s_1^2 s_3^2 + n_3^2 s_1^2 s_2^2) \\ &- N^6 [(s_1^2 - 1)s_2^2 s_3^2 + (s_2^2 - 1)s_1^2 s_3^2 + (s_3^2 - 1)s_1^2 s_2^2] \end{aligned}$$

část III

$$+ N^6 2s_1^2 s_2^2 s_3^2.$$

Příspěvky ze všech tří částí musíme sečíst. Proto dáme k sobě členy s odpovídající mocninou N a dostaneme u jednotlivých mocnin tyto výrazy:

N^0 :

$$n_1^2 n_2^2 n_3^2 = n_1^2 n_2^2 n_3^2 (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)$$

N^2 :

$$-(s_2^2 + s_3^2)n_2^2 n_3^2 - (s_1^2 + s_3^2)n_1^2 n_3^2 - (s_1^2 + s_2^2)n_1^2 n_2^2 = -s_1^2 n_1^2 (n_2^2 + n_3^2) - s_2^2 n_2^2 (n_1^2 + n_3^2) - s_3^2 n_3^2 (n_1^2 + n_2^2)$$

N^4 :

$$-n_1^2 (s_2^2 + s_3^2 - 1) - n_2^2 (s_1^2 + s_3^2 - 1) - n_3^2 (s_1^2 + s_2^2 - 1) = s_1^2 n_1^2 + s_2^2 n_2^2 + s_3^2 n_3^2$$

N^6 :

$$s_1^2 s_2^2 s_3^2 - s_1^2 s_2^2 - s_1^2 s_3^2 - s_2^2 s_3^2 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 - 1 - 3s_1^2 s_2^2 s_3^2 + s_2^2 s_3^2 + s_1^2 s_3^2 + s_1^2 s_2^2 + 2s_1^2 s_2^2 s_3^2 = 0$$

Jak je zřejmé, člen s nejvyšší mocninou (N^6) vyjde identicky nulový.

Podívejme se podrobněji na členy celkového determinantu s s_1^2 . Členy s s_2^2 nebo s s_3^2 musí být symetrické, získáme je pouhou cyklickou záměnou indexů.

$$\begin{aligned} s_1^2 [n_1^2 n_2^2 n_3^2 - N^2 n_1^2 (n_2^2 + n_3^2) + n_1^2 N^4] &= s_1^2 n_1^2 [N^4 - N^2 (n_2^2 + n_3^2) + n_2^2 n_3^2] \\ &= s_1^2 n_1^2 (N^2 - n_2^2)(N^2 - n_3^2). \end{aligned}$$

Sečteme-li analogické členy pro všechny tři složky s_1^2 , s_2^2 , s_3^2 , potom dostaneme podmínku nulovosti determinantu (A.12) ve tvaru

$$\begin{aligned} & s_1^2 n_1^2 (N^2 - n_2^2)(N^2 - n_3^2) \\ & + s_2^2 n_2^2 (N^2 - n_1^2)(N^2 - n_3^2) \\ & + s_3^2 n_3^2 (N^2 - n_1^2)(N^2 - n_2^2) = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Pokud jsou závorky $(N^2 - n_i^2) \neq 0$ pro $i = 1, 2, 3$, potom můžeme těmito závorkami podělit a podmínku pro vlastní číslo N upravit na následující tvar,

$$\boxed{\frac{s_1^2 n_1^2}{N^2 - n_1^2} + \frac{s_2^2 n_2^2}{N^2 - n_2^2} + \frac{s_3^2 n_3^2}{N^2 - n_3^2} = 0} \quad (\text{A.14})$$

Například, pokud se omezíme jen na osu x_1 , tedy $s_1 = 1$, $s_2 = s_3 = 0$, potom dostaneme vztah

$$(N^2 - n_2^2)(N^2 - n_3^2) = 0.$$

Je zřejmé, že při šíření ve směru osy $\vec{x}_1$ mají dva vlastní stavy polarizace světla index lomu n_2 a n_3 . V obecném směru musíme řešit kvadratickou rovnici pro N^2 , kterou můžeme získat roznásobením závorek v (A.13),

$$N^4(s_1^2 n_1^2 + s_2^2 n_2^2 + s_3^2 n_3^2) - N^2[s_1^2 n_1^2(n_2^2 + n_3^2) + s_2^2 n_2^2(n_1^2 + n_3^2) + s_3^2 n_3^2(n_1^2 + n_2^2)] + n_1^2 n_2^2 n_3^2 = 0$$

Jak je známo, řešením kvadratické rovnice $AN^4 + BN^2 + C = 0$ dostaneme dva kořeny, které mají velikost $N_{\pm}^2 = (-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC})/2A$.

Zavedeme si vektor délky indexu lomu ve směru $\vec{k}$ vlnového vektoru: $\vec{X}_{\Sigma} = (X, Y, Z) = N(s_1, s_2, s_3)$. Dosazením do předešlé kvadratické rovnice získáme vztah pro dvouvrstvou plochu, která se označuje *indexová plocha* (Σ)

$$\begin{aligned} & [n_1^2 X^2 + n_2^2 Y^2 + n_3^2 Z^2][X^2 + Y^2 + Z^2] \\ & - [X^2 n_1^2(n_2^2 + n_3^2) + Y^2 n_2^2(n_1^2 + n_3^2) + Z^2 n_3^2(n_1^2 + n_2^2)] \\ & + n_1^2 n_2^2 n_3^2 = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Jaký je rozdíl mezi tímto zápisem a předešlým výrazem (A.13)?

- Rovnice (A.13) je rovnice pro vlastní číslo – index lomu N .
- V rovnici (A.15) hledáme vektor $\vec{X}_{\Sigma}$, který vyhovuje této rovnici. Index lomu je pak délka tohoto vektoru.

Literatura

- [1] J. Soubusta: *Fyzika pevných látek*, Vydavatelství UP v Olomouci, 2012, ISBN: 978-80-244-3095-9.
- [2] P. Malý: *Optika*, Karolinum Praha, 2008, ISBN: 978-8024613420.
- [3] E. Hecht: *Optics*, Addison-Wesley, 4th edition, 2001, ISBN: 978-0805385663.
- [4] D.H. Goldstein: *Polarized Light*, CRC Press, 3rd edition, 2010, ISBN: 978-1439830406.
- [5] J. Kvasnica: *Matematický aparát fyziky*, ACADEMIA Praha, 2004.
- [6] L. Skála: *Úvod do kvantové mechaniky*, ACADEMIA Praha, 2005.
- [7] S. Huard: *Polarization of Light*, Wiley, 1996, ISBN: 978-0471965367.
- [8] A. Yariv, P. Yeh: *Optical Waves in Crystals*, John Wiley & Sons, 2002, ISBN: 978-0471430810.
- [9] V.G. Dmitriev, G.G. Gurzadyan, D.N. Nikogosyan: *Handbook of Nonlinear Optical Crystals*, Springer, 3rd edition, 1999, ISBN: 978-3540653943.
- [10] B.E.A. Saleh, M.C. Teich: *Fundamentals of Photonics*, Wiley-Interscience, 2nd edition, 2007, ISBN: 978-0471358329.
- [11] B.E.A. Saleh, M.C. Teich: *Základy fotoniky* (č. překlad Matfyzpress, UK Praha, 1996).
- [12] C. Klingshirn: *Semiconductor Optics*, Springer, 3rd edition, 2006, ISBN: 978-3540383451.
- [13] H. Haug, S.W. Koch: *Quantum Theory of the Optical and Electronic Properties of Semiconductors*, World Scientific Singapore, 4th edition, 2004, ISBN: 978-9812386090.
- [14] Y.R. Shen: *The Principles of Nonlinear Optics*, Wiley-Interscience, reprint edition, 2002, ISBN: 978-0471430803.
- [15] R.W. Boyd: *Nonlinear Optics*, Academic Press, 3rd edition, 2008, ISBN: 978-0123694706.
- [16] Jan Soubusta, Habilitační práce, UP Olomouc 2010.
- [17] C.K. Hong, Z.Y. Ou, L. Mandel, Phys. Rev. Lett. **59**, 2044 (1987).
- [18] J. Soubusta, J. Peřina Jr., M. Hendrych, O. Haderka, P. Trojek, M. Dušek, *Experimental verification of energy correlations in entangled photon pairs*, Phys. Lett. A **319**, 251 (2003).
- [19] J. Soubusta, J. Peřina Jr., O. Haderka, M. Hendrych, M. Dušek, *Experimental tests of energy and time entanglement*, Acta Phys. Hungarica B: Quantum Electronics **23**, 143 (2005).
- [20] E. Halenková, A. Černocho, K. Lemr, J. Soubusta, S. Drusová, *Experimental implementation of the multifunctional compact two-photon state analyzer*, App. Optics. **51**, 474 (2012); E. Halenková, A. Černocho, J. Soubusta, *Spontánní sestupná frekvenční parametrická konverze a zdroj fotonových párů podle návrhu P.G. Kwiaty*, Učební texty projektu RCPTM, UP Olomouc 2012, ISBN: 978-80-244-3111-6.
- [21] D.N. Nikogosyan, *Beta Barium Borate (BBO)*, Appl. Phys. A **52**, 359 (1991).
- [22] M.G. Roelofs, A. Suna, W. Bindloss, J.D. Bierlein, J. Appl. Phys. **76**, 4999 (1994).
- [23] K. Banaszek, A.B. U'Ren, I.A. Walmsley, Opt. Lett. **26**, 1367 (2001).

- [24] K. Sanaka, K. Kawahara, T. Kuga, Phys. Rev. Lett. **86**, 5620 (2001).
- [25] S. Tanzilli, W. Tittel, H. De Riedmatten, H. Zbinden, P. Baldi, M. De Micheli, D.B. Ostrowsky, N. Gisin, Eur. Phys. J. D **18**, 155 (2002).
- [26] C.E. Kuklewicz, M. Fiorentino, G. Messin, F.N.C. Wong, J.H. Shapiro, Phys. Rev. A **69**, 013807 (2004).
- [27] M.J.A. de Dood, W.T.M. Irvine, D. Bouwmeester, Phys. Rev. Lett. **93**, 040504 (2004).
- [28] N.N. Lepeshkin, A. Schweinsberg, G. Piredda, R.S. Bennink, R.W. Boyd, Phys. Rev. Lett. **93**, 123902 (2004).
- [29] M. Fiorentino, S.M. Spillane, R.G. Beausoleil, T.D. Roberts, P. Battle, M.W. Munro, Opt. Express **15**, 7479 (2007).
- [30] R. Machulka, J. Svozilík, J. Soubusta, J. Peřina, Jr., O. Haderka, Phys. Rev. Lett. **87**, 013836 (2013).
- [31] M. Dušek, *Koncepční otázky kvantové teorie*, (UP, Olomouc 2002).
- [32] M.A. Nielsen, I.I. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, 2010). ISBN: 978-11-394-95486.
- [33] P.G. Kwiat, E. Waks, A.G. White, I. Appelbaum, P.H. Eberhard, Phys. Rev. A **60**, R773 (1999).
- [34] A.G. White, D.F.V. James, P.H. Eberhard, P.G. Kwiat, Phys. Rev. Lett. **83**, 3103 (1999).
- [35] L. Novotny, B. Hecht, *Principles of Nano-Optics* (Cambridge University Press, 2006). ISBN: 978-05-218-32243.

Seznam použitých symbolů

1D	jednodimenzionální, jednorozměrný
2D	dvoudimenzionální, plošný
3D	trojdimenzionální, prostorový
$\overleftrightarrow{\mathbb{I}}$	jednotková matice, identita
$\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$	osy kartézského souřadnicového systému
a	mřížková konstanta kubických mřížek
a_{ex}	poloměr excitonu
$\vec{a}$	jednotkový vektor ve směru polarizace
$\overleftrightarrow{a}, a_{ij}$	matice transformace souřadnic
$\vec{A}$	vektorový potenciál
$\vec{B}$	vektor magnetické indukce
c	rychlost světla ve vakuu, $c = 299\,792\,458\text{ m/s}$ (přesně)
C_n	operace symetrie, n -četná osa rotace
C_{klmn}	tenzor pružnosti popsáné v elastické oblasti Hookovým zákonem
d	tloušťka krystalu
d_{ijk}	piezoelektrický tenzor
D	šířka optického svazku
$\vec{D}$	vektor elektrické indukce
e	Eulerovo číslo (2.718 281 828 4)
e	elementární náboj, $e = 1.602\,176\,634 \times 10^{-19}\text{ C}$ (přesně)
eV	elektronvolt, energie, kterou získá elektron urychlením potenciálem 1 V
E	energie
$E_c(q), E_v(q)$	vodivostní a valenční energetický pás v q -prostoru
E_g	šířka zakázaného pásu
E_p	energie fononu
$\vec{E}$	vektor elektrické intenzity
f_{FD}	Fermiho-Dirackova statistická rozdělovací funkce
$f(q)$	vzdálenost vodivostního a valenčního pásu v q -prostoru
$f_{\text{cv}}(\omega)$	síla oscilátoru
f_{ak}	frekvence akustické vlny
$\overleftrightarrow{g}$	symetrický tenzor gyrace
$\hbar$	redukováná Planckova konstanta, $2\pi\hbar = 6.626\,075\,15 \times 10^{-34}\text{ J s}$ (přesně)
$\hat{\mathcal{H}}$	hamiltonián
$\hat{\mathcal{H}}_0, \hat{\mathcal{H}}_1$	stacionární a poruchový hamiltonián
$\vec{H}$	vektor magnetické intenzity
$\imath$	imaginární jednotka ($\imath = \sqrt{-1}$)
i	operace symetrie inverze
I	operace symetrie identita, nebo proud

$\vec{j}$	hustota proudu
J_{cv}	sdružená hustota stavů
k_B	Boltzmannova konstanta, $k_B = 1.380\,649 \times 10^{-23}$ J/K (přesně)
$\vec{k}$	vlnový vektor světla, $k = 2\pi/\lambda$
$\vec{K}$	vlnový vektor akustické vlny, $K = 2\pi/\Lambda$
L	délka krystalu
m	hmotnost elektronu
m_0	hmotnost volného elektronu, $m_0 = 0.910\,938\,370 \times 10^{-30}$ kg
m_c, m_v	efektivní hmotnost elektronu ve vodivostním pásu, díry ve valenčním pásu
m_r	redukovaná efektivní hmotnost excitonu
M	materiálová konstanta popisující účinnost AO difrakce
M_n	hmotnost neutronu, $M_n = 1.674\,927 \times 10^{-27}$ kg
$\vec{M}$	vektor magnetizace
n	index lomu
n_o, n_e	řádný a mimořádný index lomu v jednoosém krystalu
N	indexu lomu jako vlastní číslo řešené rovnice, koncentrace elektronů
$\tilde{N}$	komplexní index lomu, $\tilde{N} = n + i\kappa$
N_A	Avogadrova konstanta, $N_A = 6.022\,140\,76 \times 10^{23}$ mol ⁻¹ (přesně)
$\hat{p}$	operátor hybnosti
$\vec{P}$	vektor polarizace
p_{ijmn}	fotoelastický tenzor (někdy se označuje jako elastooptický tenzor)
q	velikost vlnového vektoru elektronu, hustota náboje elektronů
Q	hustota náboje iontů, parametr popisující režim AO prvku
$\vec{q}$	vlnový vektor elektronu
$\vec{r}$	polohový vektor elektronu
r_{ijk}	tenzor lineárního elektrooptického jevu (Pockelsův jev)
R_{ex}	vazebná energie základního stavu excitonu (excitonový Rydberg)
$\vec{s}$	jednotkový vektor ve směru vlnového vektoru světla, $\vec{k} = k\vec{s}$
S	plocha
$\vec{S}$	Poyntingův vektor
S_n	operace symetrie n -četná nevlastní osa rotace
S_{ijkl}	tenzor kvadratického elektrooptického jevu (Kerrův jev)
t	čas
$u_{\vec{q}}(\vec{r})$	periodická část Blochovy vlnové funkce
u_{ij}	tenzor malých deformací
$\vec{u}$	vektor výchylky z rovnovážné polohy při deformaci krystalu
U, U_{pn}	napětí přiložené na kontakty
U_π	půlvlnné napětí
V	objem
$V(\vec{r})$	periodický potenciál pro elektrony v krystalu
$\vec{v}$	vektor rychlosti
v_{ak}	rychlost akustické vlny
$\vec{v}_f, \vec{v}_g$	fázová, resp. grupová rychlost
w	hustota elektromagnetické energie
w_e, w_m	hustota elektrické energie a magnetické energie
w_0	pološířka sedla gassovského svazku
W_{cv}	pravděpodobnost přechodu elektronu z valenčního do vodivostního pásu ($v \rightarrow c$)
$\vec{X}$	vektor popisující indexový elipsoid (indikatrix)
z	řád tenzoru (T_{ijk} je tenzor 3. řádu, $z = 3$)

α	absorpční koeficient
γ_{ijk}	tenzor cirkulární anizotropie
$\vec{\Gamma}$	vektor gyrace
δ	Diracova δ -funkce
δ_{ij}	Kroneckerovo delta
ε	permitivita
$\tilde{\varepsilon}$	komplexní permitivita, $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$
ε_0	permitivita vakua, $\varepsilon_0 = 8.854\,187\,8 \times 10^{-12}$ F/m
ε_r	relativní permitivita
η	účinnost AO difrakce
θ	polární úhel
$\delta\theta$	úhlový rozptyl (divergence) optického svazku
θ_B	Braggův úhel rozptylu
θ_c	úhel řezu krystalu
ϑ	sklon optické osy dvouosého materiálu
κ	vazebná konstanta popisující difrakci
$\varkappa$	index extinkce, komplexní část indexu lomu
λ	vlnová délka světla
Λ	vlnová délka akustické vlny
μ	permeabilita
μ_0	permeabilita vakua, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m
μ_r	relativní permeabilita
ν	frekvence světla
π	Ludolfovo číslo (3.141 592 653 6)
π_{ijkl}	piezooptický tenzor
ρ	hustota náboje; měrný odpor; úhel dvojlohu (walk-off)
σ	vodivost
$\sigma_h, \sigma_v, \sigma_d$	operace symetrie různě orientované roviny zrcadlení
Σ_{ij}	tenzor mechanického napětí
τ	doba života, relaxační doba, časová konstanta
ϕ	azimutální úhel
$\delta\Phi$	úhlový rozptyl akustické vlny
χ, χ_e	elektrická susceptibilita
χ_m	magnetická susceptibilita
$\psi_{\vec{q}}(\vec{r})$	Blochova vlnová funkce
ω	kruhová frekvence světla ($\hbar\omega$ je energie jednoho fotonu)
ω_a	frekvence přechodu v atomu
ω_r	frekvence módu rezonátoru
ω_{TO}, ω_{LO}	frekvence příčného a podélného optického fononu
ω_{pl}	plazmová frekvence elektronů v kovu
Ω	frekvence akustické vlny