

Přehled vybraných statistických nástrojů pro předmět SLO/UFYM

Tento dokument není samostatnou studijní oporou!

Slouží k využití při písemné zkoušce.

verze 2024-1

I. ZÁKLADNÍ VELIČINY

Celá populace obsahuje N prvků s hodnotami veličiny $X = x_i, i \in [1; N]$. **Střední hodnota** veličiny X je

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i,$$

rozptyl veličiny X je roven

$$V = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2,$$

a **směrodatná odchylka** $\sigma = \sqrt{V}$.

Vzorek vybraný z populace obsahuje n prvků s hodnotami veličiny $X = x_i, i \in [1; n]$. **Střední hodnota** veličiny X celé populace je odhadnuta jako střední hodnota veličiny X ve vzorku

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

rozptyl veličiny X je odhadnut pomocí

$$\bar{V} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2,$$

a odhad **směrodatné odchylky** $\bar{\sigma} = \sqrt{\bar{V}}$. **Směrodatnou odchylku odhadů střední hodnoty** (neboli standardní chybu určení průměru) vypočítáme jako $\bar{\sigma}_{\bar{x}} = \bar{\sigma}/\sqrt{n}$.

Kombinovaná nejistota $u_C = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}$, kde u_A a u_B jsou nejistoty typu A a B.

II. T-TEST

(a) Střední hodnoty normálně rozdělené veličiny X pozorované na **dvou vzorcích** byly určeny jako $\bar{x}_1$ a $\bar{x}_2$. Při platnosti nulové hypotézy H_0 : **populace, ze kterých vzorky pocházejí, mají stejné střední hodnoty**, bude mít veličina

$$t = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{\frac{\bar{V}_1}{n_1} + \frac{\bar{V}_2}{n_2}}}$$

Studentovo t rozdělení (pro kritické hodnoty využijeme T tabulku). $\bar{V}_1$ a $\bar{V}_2$ jsou odhady rozptylů vypočítané z jednotlivých vzorků o velikostech n_1 a n_2 . Počet stupňů volnosti $df = n_1 + n_2 - 2$.

(b) Střední hodnota normálně rozdělené veličiny X byla na základě **jednoho vzorku** odhadnuta jako $\bar{x}$. Při platnosti nulové hypotézy H_0 : **vzorek pochází z rozdělení se střední hodnotou μ a směrodatnou odchylkou σ** , bude mít veličina

$$t = \frac{|\bar{x} - \mu|}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Studentovo t rozdělení (pro kritické hodnoty využijeme T tabulku). Počet prvků ve vzorku je n a stupňů volnosti $df = n - 1$.

III. REGRESE A F-TEST

V experimentu byly nastaveny hodnoty nezávislé proměnné $X = x_i, i \in [1; n]$. Pro tyto hodnoty byly měřeny hodnoty závislé veličiny Y označené y_i . Byl vytvořen model (fyzikální zákon) odhadující z hodnot x_i hodnoty veličiny Y označené $\hat{y}_i$. **Reziduem** rozumíme rozdíl $r_i = y_i - \hat{y}_i$. **Součtem čtverců reziduí** rozumíme výraz $RES = \sum_{i=1}^n r_i^2$.

Koeficient determinace

$$R^2 = 1 - \frac{RES}{SS}$$

stanoví jaký podíl rozptylu veličiny Y vysvětlí náš model $\hat{y}$. $SS = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$ (funguje přesně pouze pro lineární regresi).

Test modelu proti situaci bez modelu: za předpokladu nulové hypotézy H_0 : hodnoty RES a SS **nejsou statisticky významně odlišné, pozorovaný pokles rozptylu vyjádřený pomocí R^2 je pouze náhodný**, bude mít veličina

$$F = \frac{(SS - RES)/df_c}{RES/df_j}$$

F rozdělení (pro kritické hodnoty využijeme F tabulku). Počet stupňů volnosti určíme jako $df_c = p - 1$, $df_j = n - p$, kde n je počet měření a p počet parametrů modelu.

Test dvou modelů: máme-li k dispozici **dva modely** $\hat{y}^{(1)}$ o počtu parametrů p_1 a $\hat{y}^{(2)}$ o počtu parametrů p_2 , kdy první je zjednodušením druhého, obdržíme pro tyto modely hodnoty součtů čtverců reziduí RES_1 a RES_2 . Za předpokladu nulové hypotézy H_0 : **vzhledem k počtu parametrů obou modelů není mezi RES_1 a RES_2 statisticky významný rozdíl**, bude mít veličina

$$F = \frac{(RES_1 - RES_2)/df_c}{RES_2/df_j}$$

F rozdělení (pro kritické hodnoty využijeme F tabulku). Počet stupňů volnosti $df_c = df_1 - df_2$ a $df_j = df_2$, kde $df_1 = n - p_1$ a $df_2 = n - p_2$.

Test dvou variancí: F-test lze použít také k otestování, zda mezi odhady variancí $\bar{V}_1$ a $\bar{V}_2$ pozorovaných na dvou nezávislých vzorcích populací s normálním rozdělením je statisticky významný rozdíl. Za předpokladu nulové hypotézy H_0 : **obě populace mají stejné variance** (pozorovaný rozdíl je pouze důsledkem náhodného výběru vzorku), bude mít veličina

$$F = \frac{\bar{V}_1}{\bar{V}_2}$$

F rozdělení (pro kritické hodnoty využijeme F tabulku). Počet stupňů volnosti určíme jako $df_c = n_1 - 1$ a $df_j = n_2 - 1$, kde n_1 a n_2 jsou velikosti vzorků.

Veličina χ^2 : v případě, kdy jsou nejistoty měření hodnot y_i známé a rozdílné, nahradíme veličinu *RES* veličinou

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \hat{y}_i)^2}{\sigma_i^2},$$

kde σ_i představuje odhad nejistoty měření hodnoty y_i vyjádřený například jako směrodatná odchylka. Hodnota χ^2 nám umožní přímo stanovit, zda jsou rezidua r_i mezi měřeními a model vysvětlitelná pouze jako důsledek chyby měření odhadnutý nejistotou σ_i nebo zda model nedokáže měření vysvětlit. Za předpokladu nulové hypotézy H_0 : **rozdíly mezi měřeními a odhadem modelu jsou vysvětlitelné pouze důsledkem chyby měření**, bude mít veličina χ^2 rozdělení χ^2 s počtem stupňů volnosti $df = n - p$, kde n je počet měření a p počet parametrů modelu (pro kritické hodnoty využijeme χ^2 tabulku). **F test pro porovnání dvou modelů lze provést i s použitím χ^2 namísto *RES*.**

Redukovaný χ^2 : je veličina definovaná jako $\chi_{df}^2 = \chi^2/df$. Hodnoty výrazně vyšší než 1 indikují, že model měření nedokáže vysvětlit, hodnoty okolo 1 napovídají, že model vysvětluje měření adekvátně, a hodnoty výrazně nižší než 1 mohou znamenat, že náš model má příliš mnoho parametrů.

Pearsonův test dobré shody: umožňuje posoudit, zda je pozorování vybraných kategorií vysvětlitelné referenčním rozdělením těchto kategorií. Vypočítáme

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \hat{y}_i)^2}{\hat{y}_i},$$

kde $\hat{y}_i = Np_i$. Hodnoty p_i jsou pravděpodobnosti výskytu dané kategorie plynoucí z referenčního rozdělení a $N = \sum_{i=1}^n y_i$ je celkový počet pozorování ve všech n kategoriích. Za předpokladu platnosti nulové hypotézy H_0 : **pozorovaný počet výskytů y_i lze vysvětlit referenčním rozdělením p_i** , bude mít výše uvedená veličina χ^2 rozdělení s počtem stupňů volnosti $df = n - 1$.

Šíření nejistoty: nechť je závislá proměnná y funkcí nezávislých proměnných $x^{(j)}, j \in [1; D]$, tedy

$$y = f(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(D)}).$$

Nechť nejistota určení j -té nezávislé proměnné je rovna $u^{(1)}$. Poté nejistotu závislé proměnné y označenou jako $u^{(y)}$ odhadneme pomocí vztahu

$$u^{(y)} = \sqrt{\sum_{j=1}^D \left(\frac{\partial f}{\partial x^{(j)}} u^{(1)} \right)^2}.$$

IV. STATISTICKÁ ROZDĚLENÍ A METODA MAXIMÁLNÍ VĚROHODNOSTI

Maximální věrohodnost: pravděpodobnost, že při platnosti modelu $\hat{y}_i$ pozorujeme hodnotu y_i se rovná $prob(y_i|\hat{y}_i)$, kde *prob* je pravděpodobnostní rozdělení chyb měření kolem předpovězené hodnoty $\hat{y}_i$. Celková pravděpodobnost n provedených měření vzhledem k modelu je

$$\mathcal{L} = \prod_{i=1}^n prob(y_i|\hat{y}_i)$$

neboli

$$\log \mathcal{L} = \sum_{i=1}^n \log prob(y_i|\hat{y}_i).$$

Hledáním maxima $\mathcal{L}$ (nebo $\log \mathcal{L}$) přes všechny parametry modelu najdeme model, který je vůči pozorování nejvěrohodnější.

Některá statistická rozdělení:

Binomické rozdělení: X úspěchů z N pokusů, p je pravděpodobnost úspěchu:

$$prob(X, N) = C(X, N) p^X (1 - p)^{N-X}$$

Poissonovo rozdělení (střední hodnota μ , $\sigma = \sqrt{\mu}$):

$$prob(X) = \frac{\mu^X}{X!} e^{-\mu}$$

Gaussovo/normální rozdělení:

$$prob(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(X-\mu)^2/2\sigma^2}$$

Exponenciální rozdělení (střední hodnota μ , $\sigma = \mu$):

$$prob(X) = \frac{1}{\mu} e^{-X/\mu}$$

Cauchyho-Lorentzovo rozdělení:

$$prob(X) = \frac{1}{\pi\gamma \left[1 + \left(\frac{X-\mu}{\gamma} \right)^2 \right]}$$

t-test table

cum. prob	$t_{.50}$	$t_{.75}$	$t_{.80}$	$t_{.85}$	$t_{.90}$	$t_{.95}$	$t_{.975}$	$t_{.99}$	$t_{.995}$	$t_{.999}$	$t_{.9995}$
one-tail	0.50	0.25	0.20	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
two-tails	1.00	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.002	0.001
df											
1	0.000	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71	31.82	63.66	318.31	636.62
2	0.000	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327	31.599
3	0.000	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215	12.924
4	0.000	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	0.000	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	0.000	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	0.000	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	0.000	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	0.000	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	0.000	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	0.000	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	0.000	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	0.000	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	0.000	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	0.000	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	0.000	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	0.000	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	0.000	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	0.000	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	0.000	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	0.000	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	0.000	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	0.000	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.768
24	0.000	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	0.000	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	0.000	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	0.000	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28	0.000	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	0.000	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30	0.000	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
40	0.000	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
60	0.000	0.679	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
80	0.000	0.678	0.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	3.195	3.416
100	0.000	0.677	0.845	1.042	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	3.174	3.390
1000	0.000	0.675	0.842	1.037	1.282	1.646	1.962	2.330	2.581	3.098	3.300
Z	0.000	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291
	0%	50%	60%	70%	80%	90%	95%	98%	99%	99.8%	99.9%
Confidence Level											

<https://byjus.com/maths/t-test-table/>

Tabulka kritických F hodnot pro hladinu 0,05

<https://www.oreilly.com/library/view/making-sense-of/9780470074718/appa-secoo4.html>

df _{imenat}	df _{čitatel}																		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5	241.9	243.9	245.9	248.0	249.1	250.1	251.1	252.2	253.3	254.3
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.36
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88

Significance level (α)

Degrees of freedom (df)	.99	.975	.95	.9	.1	.05	.025	.01
1	-----	0.001	0.004	0.016	2.706	3.841	5.024	6.635
2	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.991	7.378	9.210
3	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.345
4	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277
5	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	11.070	12.833	15.086
6	0.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.449	16.812
7	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.013	18.475
8	1.646	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.535	20.090
9	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.023	21.666
10	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209
11	3.053	3.816	4.575	5.578	17.275	19.675	21.920	24.725
12	3.571	4.404	5.226	6.304	18.549	21.026	23.337	26.217
13	4.107	5.009	5.892	7.042	19.812	22.362	24.736	27.688
14	4.660	5.629	6.571	7.790	21.064	23.685	26.119	29.141

Tabulka kritických χ^2 hodnot

<https://www.scribbr.com/wp-content/uploads/2022/05/chi-square-distribution-table.png>