INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Moderní technologie ve studiu aplikované fyziky
CZ.1.07/2.2.00/07.0018

Tenzor malé deformace

(studijní opora k přednášce SLO/EXTM2)

Analýza stavu deformace tělesa je již po řadu desetiletí jednou z nejčetnějších úloh mechaniky. Účelem tohoto krátkého studijního textu je zavést nejnutnější základní pojmy z oboru mechaniky kontinua, které tvoří vazbu mezi deformací předmětu a optickými experimentálními metodami užívanými v experimentální mechanice.

Stav deformovaného tělesa budeme zkoumat bez ohledu na příčiny, které deformaci vyvolávají, a na fyzikální zákony, podle nichž probíhá.[1] Zaměříme se pouze na určení čistě geometrického vztahu mezi veličinami, které charakterizují vlastní deformaci, a derivacemi veličin popisujících celkové posunutí tělesa. V tomto celkovém posunutí je zahrnuta:

- vlastní deformace tělesa,
- lineární translace předmětu jako tuhého tělesa,
- rotace předmětu jako tuhého tělesa.

Vlastní deformace je změna vzájemné polohy jednotlivých hmotných bodů tvořících toto těleso a s tím související tvarové změny tělesa. Lineární translace předmětu jako tuhého tělesa je posunutí, při němž se celé těleso posouvá jako celek. Rotace předmětu jako tuhého celku je posunutí, při kterém se celé těleso otáčí jako celek.

V našich úvahách se omezíme pouze na tzv. malé deformace a zavedeme tenzor malé deformace. Následující odvození provedeme podle M. Brdičky [1, 2]. Při této příležitosti je nutno konstatovat, že tento přístup k tenzoru deformace je klasický. Zajímavý moderní přístup k popisu teorie malé deformace pomocí kartézských tenzorů může nabídnout, například, práce M. Okrouhlíka [3].

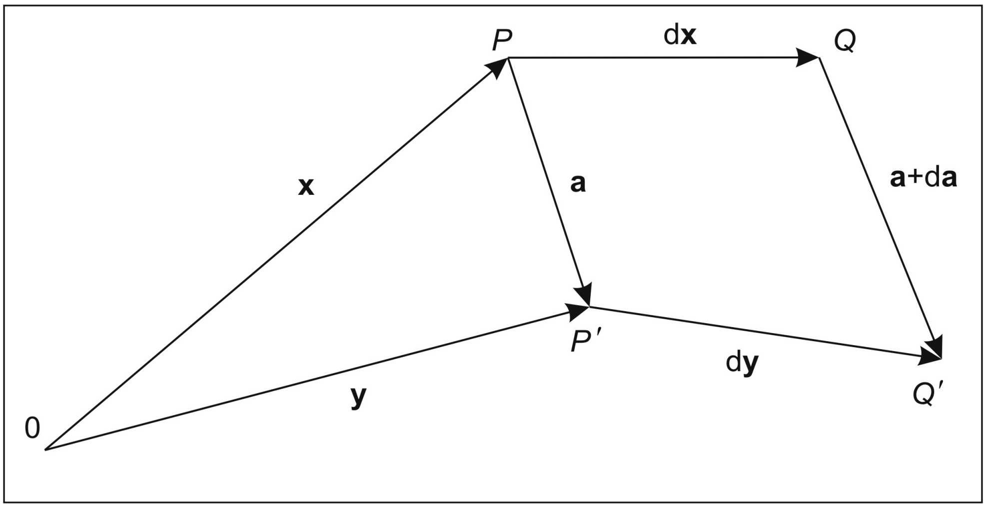
Mějme dva blízké body P, Q na nedeformovaném tělese (obr. 1). Poloha bodu P tělesa v nedeformovaném stavu je vzhledem k počátku soustavy souřadnic 0 dána polohovým vektorem $\mathbf{x}$, jehož složky jsou x_i pro $i = 1, 2, 3$. Podobně poloha bodu Q vzhledem k počátku je určena polohovým vektorem $\mathbf{x} + \mathrm{d}\mathbf{x}$, jehož složky jsou $x_i + \mathrm{d}x_i$. Nyní těleso vystavíme působení deformace. Jejím vlivem bod P přejde do bodu P' a bod Q do bodu Q'. Poloha bodu P' je dána polohovým vektorem $\mathbf{y}$ o složkách y_i pro $i = 1, 2, 3$ a poloha bodu Q' je dána polohovým vektorem $\mathbf{y} + \mathrm{d}\mathbf{y}$ o složkách $y_i + \mathrm{d}y_i$. Působením vnějších sil se tedy bod P posunul do bodu P' a toto posunutí budeme charakterizovat vektorem posunutí $\mathbf{a}$, který má složky a_i pro $i = 1, 2, 3$. Mezi souřadnicemi bodů P a P' pak platí vzájemný vztah

$$y_i = x_i + a_i(x_j) \tag{1}$$

pro $i, j = 1, 2, 3$.

Pro naše úvahy dále předpokládejme, že funkce y_i jsou spojité a mají parciální derivace všech potřebných řádů.

[1] Studiem deformovaného stavu tělesa bez ohledu na příčiny, které deformaci vyvolávají, se zabývá geometrie konečných deformací.



Obr. 1: K vyjádření tenzoru malé deformace.

Jak bylo řečeno výše, omezíme se pouze na malé deformace, takže složky vektoru posunutí a_i spolu s jejich derivacemi jsou velmi malé ve srovnání s číslem 1. Z rovnice (1) si vyjádříme diferenciál $\mathrm{d}y_i$, přičemž v Taylorově rozvoji funkce $a_i\,(x_j + \mathrm{d}x_j)$ můžeme zanedbat členy vyšších řádů

$$\mathrm{d}y_i = \mathrm{d}x_i + \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x_j\,. \qquad (2)$$

Využijeme-li identity

$$\mathrm{d}x_i = \delta_{ij}\,\mathrm{d}x_j\,, \qquad (3)$$

kde δ_{ij} je Kroneckerovo delta, potom lze psát

$$\mathrm{d}y_i = \mathrm{d}x_i + \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x_j = (\delta_{ij} + \frac{\partial a_i}{\partial x_j})\,\mathrm{d}x_j\,. \qquad (4)$$

Souřadnice bodu Q' jsou $y_i + \mathrm{d}y_i$, proto, sečteme-li rovnice (1) a (4), získáme pro ně vztah

$$y_i + \mathrm{d}y_i = x_i + a_i + \mathrm{d}x_i + \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x_j\,. \qquad (5)$$

Ze vztahu (5) je zřejmé, že původní souřadnice $x_i + \mathrm{d}x_i$ bodu Q se následkem deformace nezměnila pouze o složku vektoru posunutí a_i, ale i o výraz

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x_j\,. \tag{6}$$

Protože posunutí a_i nezávisí na poloze bodu Q vzhledem k bodu P a je společné všem bodům uvažovaného okolí bodu P, popisuje nám translaci tělesa jako tuhého celku. Výraz (6) však již na poloze bodu Q a P, tj. na $\mathrm{d}x_i$, závisí a tedy charakterizuje zbývající děje - rotaci tělesa jako tuhého celku a jeho vlastní deformaci. Zabývejme se dále tímto výrazem podrobněji.

Pomocí rovnice (4) lze výraz (6) vyjádřit jako

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x_j = \mathrm{d}y_i - \mathrm{d}x_i \equiv \delta(\mathrm{d}x_i)\,. \tag{7}$$

Z tohoto vztahu plyne, že výraz (6) vlastně představuje přírůstky složek původního vektoru $\mathrm{d}\mathbf{x}$, které označíme $\delta(\mathrm{d}x_i)$. Tyto přírůstky v sobě musí zahrnovat jak vlastní deformaci, tak i rotaci tělesa.

Nyní prostudujeme každý případ odděleně. Pro případ rotace platí, že vzdálenosti dvou libovolných bodů zůstávají konstantní. Odtud plyne, že přírůstky $\delta(\mathrm{d}x_i)$ jsou sice různé od nuly, ale kvadrát délky původního vektoru $\mathrm{d}\mathbf{x}$ se nezmění. Tedy variace tohoto kvadrátu je rovna nule a platí

$$\delta\left|\mathrm{d}\mathbf{x}\right|^2 = \delta(\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_i) = 2\mathrm{d}x_i\,\delta(\mathrm{d}x_i) = 0\,. \tag{8}$$

Označíme-li v rovnici (7) výraz $(\partial a_i / \partial x_j)$ jako Ω_{ij}, potom pro přírůstek složek vektoru $\mathrm{d}\mathbf{x}$ způsobený rotací dostaneme relaci

$$\delta(\mathrm{d}x_i) = \Omega_{ij}\,\mathrm{d}x_j\,. \tag{9}$$

Dosadíme-li tento vztah do rovnice (8), obdržíme po úpravě

$$\Omega_{ij}\,\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j = 0\,. \tag{10}$$

Výraz na levé straně rovnice (10) dále rozepíšeme do jednotlivých složek. Tedy

$$\begin{aligned}&\Omega_{11}\mathrm{d}x_1{}^2 + \Omega_{22}\mathrm{d}x_2{}^2 + \Omega_{33}\mathrm{d}x_3{}^2\\ &+ (\Omega_{12}+\Omega_{21})\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 + (\Omega_{23}+\Omega_{32})\,\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 + (\Omega_{31}+\Omega_{13})\,\mathrm{d}x_3\,\mathrm{d}x_1 = 0\,.\end{aligned} \tag{11}$$

Rovnice (11) musí být splněna pro každý bod z infinitezimálního okolí uvažovaného bodu P a z toho plyne, že $\mathrm{d}x_i$ jsou libovolné nenulové infinitezimální veličiny. Proto koeficienty u $\mathrm{d}x_1^2$, $\mathrm{d}x_2^2$, …, $\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2$, …, $\mathrm{d}x_3\,\mathrm{d}x_1$ musí být rovny nule a rovnice (11) je tudíž splněna identicky. Pak platí

$$\Omega_{11} = \Omega_{22} = \Omega_{33} = 0\,,\ \Omega_{12} + \Omega_{21} = 0\,,\ \Omega_{23} + \Omega_{32} = 0\,,\ \Omega_{31} + \Omega_{13} = 0\,, \tag{12a}$$

neboli obecně pro $i, j = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} \Omega_{ij} &= -\Omega_{ji}\,, \quad (i \neq j)\,, \\ \Omega_{ij} &= 0, \qquad\ \ (i = j)\,. \end{aligned} \tag{12b}$$

Z rovnic (7) a (9) až (12) lze učinit závěr, že výraz Ω_{ij} představuje antisymetrický tenzor a vyjadřuje rotaci uvažovaného blízkého okolí bodu P jako tuhého celku. Jelikož antisymetrický tenzor je určen v trojrozměrném prostoru třemi nezávislými složkami, můžeme tenzor Ω_{ij} vyjádřit ve tvaru tzv. axiálního vektoru $\mathbf{\Omega}$ o složkách Ω_1, Ω_2, Ω_3, které zavádíme jako

$$-\Omega_1 = \Omega_{23}\,,\ -\Omega_2 = \Omega_{31}\,,\ -\Omega_3 = \Omega_{12}\,. \tag{13}$$

Z důvodu antisymetričnosti Ω_{ij} rozložíme výraz $(\partial a_i / \partial x_j)$ na část symetrickou a antisymetrickou, a tím od sebe rozlišíme příspěvek vlastní deformace a příspěvek rotace předmětu. Tudíž

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j} + \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j} - \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\right). \tag{14}$$

Symetrická část udává vlastní deformaci a značíme ji

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j} + \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\right). \tag{15}$$

Antisymetrická část udává rotaci elementu tělesa jako tuhého celku a značíme ji

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j} - \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\right). \tag{16}$$

Zavedeme-li nakonec označení z rovnic (15) a (16) do rovnice (7), lze přírůstky složek vektoru d**x** vyjádřit pomocí superpozice přírůstků způsobených vlastní deformací a rotací elementu tělesa

$$\delta(\mathrm{d}x_i) = \varepsilon_{ij}\,\mathrm{d}x_j + \Omega_{ij}\,\mathrm{d}x_j\,. \tag{17}$$

V závěru shrneme odvozené výsledky a pokusíme se je napsat v přehledném tvaru. Za tímto účelem provedeme následující úvahu. Souřadnice bodu P jsme, v souladu s obr. 1, označili jako x_i a souřadnice bodu Q jako $x_i + \mathrm{d}x_i$. Označme nyní souřadnice bodu Q pomocí x_i'. Pak dostaneme

$$\mathrm{d}x_i = x_i' - x_i\,. \tag{18}$$

Rovnici (17) lze proto přepsat do tvaru

$$\delta(x_i' - x_i) = \varepsilon_{ij}(x_j' - x_j) + \Omega_{ij}(x_j' - x_j)\,. \tag{19}$$

Odtud úpravou obdržíme přehledný vztah pro přírůstek souřadnic bodu Q

$$\delta x_i' = \delta x_i + \varepsilon_{ij}(x_j' - x_j) + \Omega_{ij}(x_j' - x_j)\,. \tag{20}$$

První člen na pravé straně rovnice (20) vyjadřuje translaci tělesa, tedy paralelní posunutí společně s bodem P, kdy se vzdálenosti jednotlivých bodů nemění. Druhý člen vyjadřuje vlastní deformaci kontinua, při níž se mění vzdálenosti bodů kontinua. Třetí člen představuje rotaci tělesa jako tuhého celku, při níž se vzdálenosti bodů nemění.

Pokud bychom se, například, omezili na měření deformace elementu plochy povrchu zkoumaného předmětu v rovině xy zvoleného kartézského souřadného systému, můžeme na závěr textu ještě uvést v souhrnném zápisu všechny složky tenzoru malé deformace odpovídající této rovině. S odkazem na (13), (15) a (16) lze pro translační (a_x, a_y, a_z), rotační $(\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$ a deformační $(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yy})$ složky tenzoru malé deformace vzhledem k počátku kartézského souřadného systému psát

$$\begin{aligned}
&(a_x, a_y, a_z) = \left[a_x(0), a_y(0), a_z(0)\right],\\
&(\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z) = \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}\right)_0,\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)_0,\ \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}\right)_0 - \left(\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)_0\right]\right\},\\
&\varepsilon_{xx} = \left(\frac{\partial a_x}{\partial x}\right)_0,\ \varepsilon_{yy} = \left(\frac{\partial a_y}{\partial y}\right)_0,\ \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)_0 + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x}\right)_0\right],
\end{aligned} \tag{21}$$

kde složky a_x, a_y, a_z reprezentují translace ve směru souřadných os x, y, z, složky Ω_x, Ω_y, Ω_x reprezentují rotace kolem os x, y, z, a dále složka ε_{xx}, respektive ε_{yy}, představuje poměrné prodloužení ve směru souřadné osy x, respektive y, a konečně složka ε_{xy} představuje smyk.

Seznam použité a doporučené literatury:

[1] BRDIČKA, M. *Mechanika kontinua.* Praha: NČSAV, 1959.

[2] BRDIČKA, M., SAMEK, L., SOPKO, B. *Mechanika kontinua.* Praha: Academia, 2000.

[3] OKROUHLÍK, M. (editor) *Implementation of Nonlinear Continuum Mechanics in Finite Element Codes.* Prague: Institute of Thermomechanics, Academy of Sciences of the Czech Republic, 1995.