

Poznámky k přednášce

Cvičení z matematiky pro fyziky (SLO/CMF)

Jiří Kvita

SLO, PřF UP



21. února 2024

Obsah

1	Funkce	4
2	Limita a spojitost funkce, derivace	4
2.1	Derivace	5
2.2	Hrátky	6
2.3	Značení	6
3	Taylorův rozvoj	7
3.1	Symbole malé o a velké \mathcal{O}	7
3.2	Funkce jedné proměnné	7
3.3	Limity pomocí Taylorova rozvoje	8
3.4	Funkce více proměnných	8
3.5	Parciální derivace	8
4	Funkce více proměnných	9
4.1	Taylorův rozvoj funkce více proměnných	10
5	Integrály	10
5.1	Primitivní funkce, integrál	10
5.2	Integrály základních funkcí	10
5.3	Per partes	11
5.4	Věta o substituci	11
5.5	Určitý integrál	13
5.6	Integrály funkcí více proměnných	13
5.7	Gaussovské integrály	13
5.8	Délka grafu funkce	14
5.9	Křivkové integrály skalárního a vektorového pole	14
6	Diferenciální rovnice	14
6.1	Kyvadlo jako harmonický oscilátor	14
6.2	Homogenní diferenciální rovnice	14
6.3	Rovnice typu $y' = f(y)$	15
6.4	Rovnice typu $y'(t) = h(t)f(y)$	16
6.5	Metoda integračního faktoru	17
6.6	Nehomogenní diferenciální rovnice, variace konstant	17
6.7	Speciální případ rovnice druhého řádu	17
7	Parciální diferenciální rovnice ve fyzice – přehled	18
8	Diracova delta distribuce a konvoluce	19
8.1	Delta distribuce	19
8.2	Konvoluce	20
9	Fourierovy řady	21
10	Fourierova transformace	23
10.1	Diskrétní Fourierova transformace	24
11	Greenovy funkce	25

12 Geometrie	28
13 Goniometrické identity	28
14 Lineární algebra	29
14.1 Matice	29
14.2 Rotace v \mathbb{R}^2	30
14.3 Vlastní čísla a vlastní vektory	31
14.4 Další transformace	31
14.5 Skalární součin	31
14.5.1 Reálné prostory	31
14.5.2 Komplexní prostory	32
14.5.3 Invariance skalárního součinu	32
14.6 Hermitovsky sdružená matice	32
15 Vektorová algebra, sumy, tenzory	33
15.1 Čtyřvektory	33
15.2 Grupy a algebry	33
15.3 Hrátky	33
16 Základy komplexní analýzy	33
17 Speciální polynomy	33
17.1 Legendreovy polynomy	33
17.2 Hermiteovy polynomy	33
17.3 Laguerrovy polynomy	33
17.4 Čebyševovy polynomy	33
17.5 Besselovy a Neumannovy funkce	33
18 Variační počet**	33
19 Grassmanova algebra**	34
A Komplexní čísla	34
B Fyzik ve vlaku	34
B.1 Začínající teoretický fyzik bez fantazie	35
B.2 Experimentální fyzik	35
B.3 Kvantový fyzik	35
B.4 Relativistický fyzik	35
B.5 Začínajícím teoretickým fyzikem bez fantazie	35
B.6 Jiným experimentálním fyzikem	36
B.7 Jiný kvantový fyzik	36
B.8 Začínajícím teoretickým fyzikem bez fantazie	36
B.9 Statistický fyzik	36
B.10 Začínající teoretický fyzik bez fantazie	36
B.11 Astrofyzik	36
B.12 Učitel fyziky	37
B.13 Začínající teoretický fyzik bez fantazie	37

1 Funkce

Nakreslete si v libovolném programu grafy funkcí

$$\frac{\sin x}{x} \quad (1)$$

$$\sin \frac{1}{x} \quad (2)$$

$$\sin x^2 \quad (3)$$

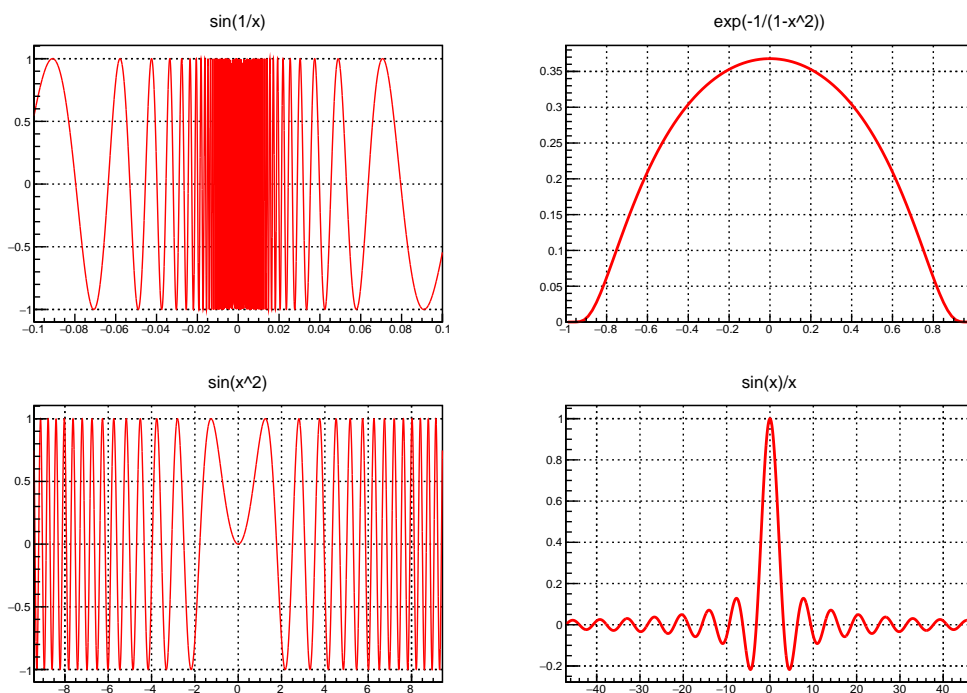
$$e^{-\frac{1}{1-x^2}} \quad (4)$$

$$\sinh(x) \quad (5)$$

$$\cosh(x) \quad (6)$$

$$\frac{1}{1-x} \quad (7)$$

a určete jejich definiční obor.



Obrázek 1: Příklady některých zajímavých funkcí.

2 Limita a spojitost funkce, derivace

Limita, spojitost zleva a zprava. Příklady funkce nespojitě v bodě, s nespojitou derivací v bodě.

Zapište definici limity funkce $\varepsilon(\delta)$ v bodě A pomocí šířky pásů f a x .

Derivace. Průběh funkce.

Lagrangeovy multiplikátory.

2.1 Derivace

$$f'(x) \equiv \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \epsilon) - f(x)}{\epsilon}$$

Aplikace na definici derivaci matice s časové závislými elementy

$$\mathbb{A}'(t) \equiv \frac{d\mathbb{A}(t)}{dt} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbb{A}(t + \epsilon) - \mathbb{A}(t)}{\epsilon}$$

Aplikace v kvantové mechanice, derivace stavového vektoru na abstraktním Hilbertově prostoru

$$\frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{|\psi(t + \epsilon)\rangle - |\psi(t)\rangle}{\epsilon}$$

Přehled základních pravidel pro derivování.

- Derivace součinu

$$(f \cdot g)' = f'g + fg'$$

z které pak plyne i integrace per-partes.

Všimněme si, že

$$(fg)'' = (f'g + fg')' = f''g + 2f'g' + fg''$$

a obecněji platí Leibnitzův vzorec

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Spočítejte si s jeho pomocí

$$(x^2 e^{-x^2/2})'', \quad (x^3 e^{-x})''''$$

- Derivace podílu

$$(f/g)' = \frac{f'g - fg'}{g^2},$$

důkaz pomocí derivace součinu $(f \frac{1}{g})'$ a s využitím derivace složené funkce.

- Derivace složené funkce

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) g'(x),$$

z které pak plyne věta o substituci pro výpočet integrálů.

- Derivace inverzní funkce

$$y = g(x), \quad x = g^{-1}(y), \quad (g^{-1}(y))' = \frac{dg^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{g'(g^{-1}(y))}$$

Všimněme si, že zatímco $g(g^{-1}(y)) = y$, tak $g'(g^{-1}(y))$ je obecně netriviální.

Příklady: derivace logaritmu a inverzí goniometrických funkcí, např. arctan, arcsin a arccos.

Osvěžte si derivace základních funkcí: polynomů, mocninných, (hyper)geometrických, exponenciály, logaritmu, podle x , y , parametru.

Spočítejte derivace $\frac{d}{dp}E(p)$ pro klasický i relativistický výraz pro energii jako funkce hybnosti, tj. $E(p) = \frac{p^2}{2m}$ či $E(p) = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$

Spočtěte

$$\frac{d}{dx} \frac{\sin(x)}{x}, \quad \frac{d}{dx} \frac{\cos(x)}{x}, \quad \frac{d}{dx} e^{-\alpha x^2}, \quad \frac{d}{d\alpha} e^{-\alpha x^2} \quad (8)$$

$$\frac{d}{dy} \frac{Ay^a + By^b}{Cy^d + Dy^c}, \quad \frac{d}{dy} \frac{y}{\sqrt{1 \pm y^2}}, \quad \frac{d}{dx} x^x, \quad \frac{d}{dx} a^{\beta x} \quad (9)$$

$$\frac{d}{d\phi} e^{ik\phi}, \quad \frac{d}{dz} \frac{az^2 + bz}{1 - iz}, \quad \frac{d}{dx} \ln \frac{1}{x} \quad (10)$$

$$\frac{d}{dx} e^{\beta \sin \alpha x}, \quad \frac{d}{dx} e^{\beta x^2 \cos \gamma x}, \quad \frac{d}{dx} [\sin \beta x^2 \cos^m \alpha x^3] \quad (11)$$

$$\frac{d}{dx} \log(\beta x^2), \quad \frac{d}{dx} \log(x^3 \sin \alpha x), \quad \frac{d}{dx} \log\left(\frac{\sin \beta x}{x^2}\right) \quad (12)$$

$$\frac{d}{d\xi} \xi^r \sin k\xi, \quad \frac{d}{d\xi} \frac{1}{a\xi^2 + b\xi^3}, \quad (13)$$

$$\frac{d}{d\theta} \log \tan \frac{\theta}{2}, \quad \frac{d}{d\theta} \sqrt{1 - \beta\theta^2}, \quad \frac{d}{d\theta} \frac{1}{\sqrt{\beta - \alpha\theta^3}} \quad (14)$$

$$\frac{d}{dt} e^{i\omega t}, \quad \frac{d}{dx} \sin^2 \beta x^\gamma, \quad \frac{d}{dx} e^{\beta x^\gamma} \quad (15)$$

$$\frac{d}{d \cos \phi} \cos^{3/2} \phi, \quad \frac{d}{d \sin \theta} e^{\beta \sin \theta}, \quad \frac{d}{d \cos \theta} [\cos^n \theta e^{\beta \sin \theta}] \quad (16)$$

a další šílenosti dle libosti:)

2.2 Hrátky

Co je větší e^π , nebo π^{e^e} ?

2.3 Značení

$$\frac{d}{dx} f(x) \equiv f'(x)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \equiv \partial_{x_i} \equiv \partial_i$$

Einsteinova sumační konvence: přes opakující se indexy se automaticky sčítá:

$$x_i x_i \equiv \sum_i x_i^2 = \|\vec{x}\|^2$$

$$\epsilon_{ijk} A_{ik} \equiv \sum_{ik} \epsilon_{ijk} A_{ik}$$

Pokud se přes shodné indexy náhodou sčítat nemá, podtrhneme je.

Kroneckerův symbol (symetrický tenzor 2. řádu):

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Levi-Civitův symbol (antisymetrický tenzor 3. řádu):

$$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} = \epsilon_{ikj}, \quad \epsilon_{123} = 1 \quad \Rightarrow \quad \epsilon_{\underline{ik}\underline{k}} = -\epsilon_{\underline{ik}\underline{k}} = 0$$

3 Taylorův rozvoj

3.1 Symboly malé o a velké \mathcal{O}

3.2 Funkce jedné proměnné

Analogie s rozjezdem aut na křižovatce. Předvídání chování, extrapolace. Taylorova věta.

Nechť má funkce $f(x)$ všechny derivace v bodě a . Pak platí

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

popř.

$$f(x+a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} x^k$$

a speciálně hojně používaný rozvoj funkce v nule je dán formulkou

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

Proveďte rozvoj v bodě $a = 0$ funkcí pro $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{1 \pm x}, \quad \sqrt{1 \pm x}, \quad \sqrt{1 \pm x^2}, \quad \frac{1}{\sqrt{1 \pm x^2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{1 \pm x}}$$
$$\sin x, \quad \cos x, \quad \exp x, \quad \exp(ix),$$
$$\ln(1 \pm x), \quad e^{\pm x^2}$$

Ukažte rozvojem do druhého netriviálního řádu, jaká je první relativistická korekce ke klasickému výrazu pro kinetickou energii. Návod:

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} = mc^2 \sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2 c^2}}$$

a uvažte Taylorův rozvoj funkce $f(\delta) = \sqrt{1 + \delta^2}$. Všimněte si, že si budete muset napočítat několik derivací, než dostanete netriviální příspěvek do rozvoje.

Taylorův rozvoj pro $a = 0$ některých důležitých funkcí

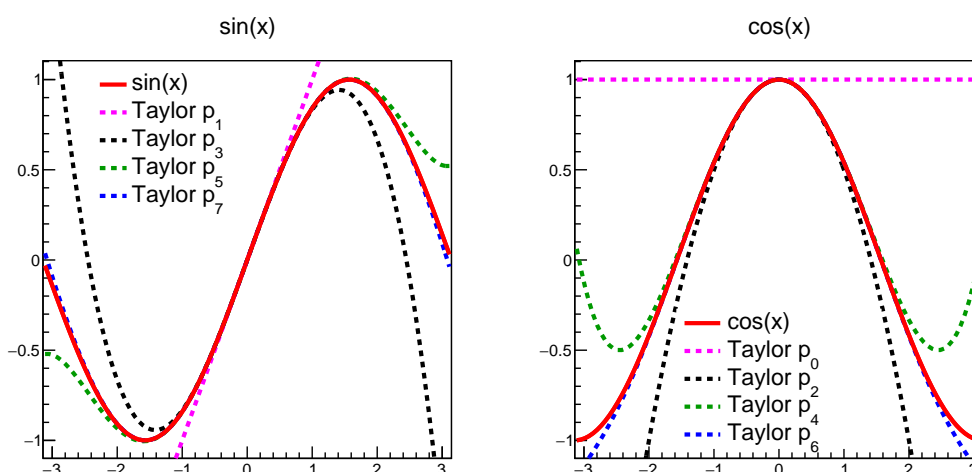
$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \tag{17}$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \tag{18}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \tag{19}$$

$$\sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \tag{20}$$

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2k!} \tag{21}$$



Obrázek 2: Aproximace funkcí $\sin x$ a $\cos x$ několika prvními stupni Taylorova polynomu.

3.3 Limity pomocí Taylorova rozvoje

Pomocí Taylorova rozvoje vyřešte limity, výsledek je uveden v hranatých závorkách.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} [1] ; \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x} \right) [0] \quad (22)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} \left[\frac{1}{3} \right] ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4} \left[-\frac{1}{12} \right] \quad (23)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x \sin x} [1] ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} [1] \quad (24)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \left[\frac{1}{2} \right] ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + e^{-x} - 1}{x} \left[\frac{1}{2} \right] \quad (25)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x} [1] ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - 1}{x^2} \left[\frac{1}{2} \right] \quad (26)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x^2}}{x^2} [-1] ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cosh x}{x} [1] \quad (27)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - \sinh x - 1}{x} [-2] ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} \left[-\frac{1}{6} \right] \quad (28)$$

Funkce si také vykreslete:)

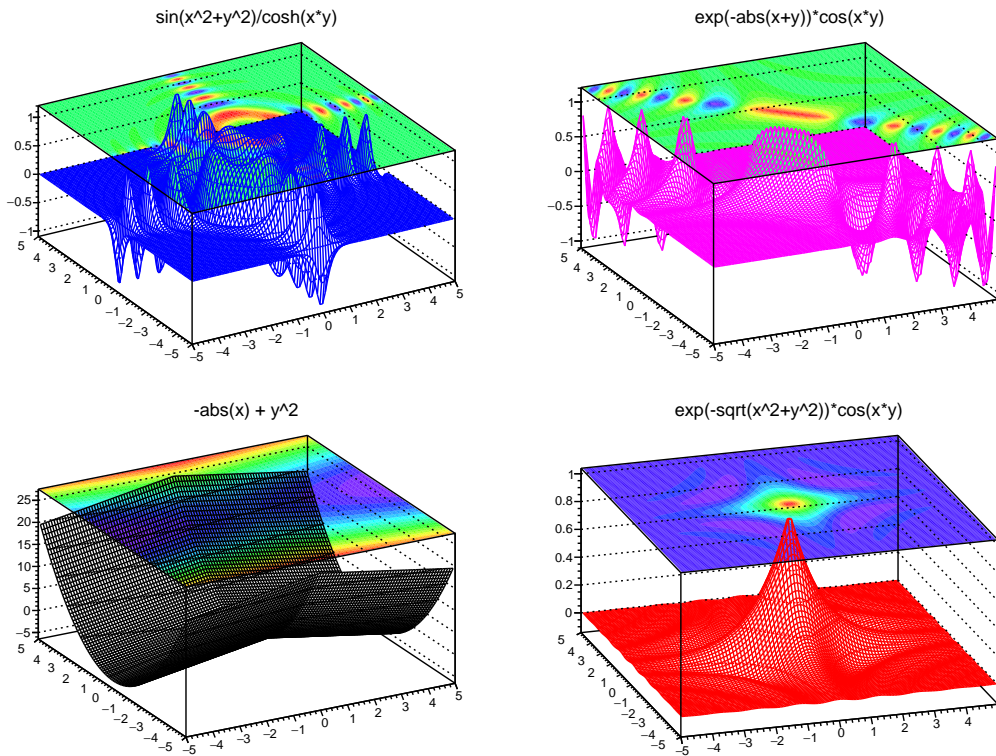
3.4 Funkce více proměnných

Totální diferenciál, derivace ve směru, gradient. Aplikace v propagaci chyb. Linearizace.

3.5 Parciální derivace

Pro $\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ a $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ spočtěte

$$\nabla \frac{1}{r} \quad \text{a} \quad \nabla \frac{1}{r^n}$$



Obrázek 3: Příklady některých zajímavých funkcí dvou proměnných.

4 Funkce více proměnných

Nakreslete si grafy funkcí, a spočítejte si vektor jejich gradientu. Zkonstruujte směr kolmý na gradient, a přesvědčte se, že derivace funkce ve směru kolmém na gradient je nula.

$$e^{-(x^2+y^2)}, \quad (x+y)e^{-\sqrt{x^2+y^2}} \quad (29)$$

$$\sin xy, \quad \sin(x+y) \quad (30)$$

$$\sin \sqrt{x^2+y^2}, \quad \sin x + \cos x \quad (31)$$

$$\frac{\sin \sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin x \sin y \quad (32)$$

$$x^2 \sin(x+y), \quad (x^2+y^2)e^{-(x+y)^2} \quad (33)$$

$$e^{-|x+y|} \cos xy, \quad e^{-|x|-|y|} \cos x \cos y \quad (34)$$

$$\frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\sin x \sin y}{xy} \quad (35)$$

$$\frac{\sin(x^2+y^2)}{\cosh xy}, \quad \frac{\sin x \sin y}{\cosh xy} \quad (36)$$

$$e^{-x^2+y^2}, \quad e^{-|x|-y^2} \quad (37)$$

$$xy \ln x \ln y, \quad \sqrt{x^2+y^2} \ln \sqrt{x^2+y^2} \quad (38)$$

$$xy e^{-xy}, \quad x e^{-x} + y e^{-y} \quad (39)$$

$$\sqrt{x^2+y^2} e^{-\sqrt{x^2+y^2}}, \quad xy e^{-x-y} \quad (40)$$

$$\arctg x \arctg y, \quad \arctg \sqrt{x^2+y^2}. \quad (41)$$

4.1 Taylorův rozvoj funkce více proměnných

Ze znalosti všech parciálních derivací funkce f v bodě \vec{a} můžeme najít hodnoty funkce v libovolné bodě posunutém o \vec{x} na základě Taylorova rozvoje funkce $f(\vec{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ daného výrazem

$$f(\vec{x} + \vec{a}) = f(\vec{a}) + \frac{1}{1!} \sum_{i=0}^n \frac{\partial f(\vec{a})}{\partial x_i} x_i + \frac{1}{2!} \sum_{i=0}^n \frac{\partial^2 f(\vec{a})}{\partial x_i \partial x_j} x_i x_j + \dots$$

Příklad: pomocí Taylorova rozvoje funkce $g(\vec{\varepsilon}) = |\vec{x} + \vec{\varepsilon}|$ spočtěte první netriviální člen rozvoje v bodě $\vec{\varepsilon} = \vec{0}$ normy vektoru $|\vec{x} + \vec{\varepsilon}| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x} + 2\vec{x} \cdot \vec{\varepsilon} + \vec{\varepsilon} \cdot \vec{\varepsilon}} = |\vec{x}| + \dots$.
Měli byste dostat výsledek

$$|\vec{x} + \vec{\varepsilon}| \approx |\vec{x}| + \frac{\vec{x} \cdot \vec{\varepsilon}}{r}, \quad r \equiv |\vec{x}| \equiv \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$$

5 Integrály

5.1 Primitivní funkce, integrál

Primitivní funkcí $F(x)$ k funkci $f(x)$ nazveme každou funkci $F(x)$, pro kterou platí

$$F'(x) = f(x)$$

Platí, že různé primitivní funkce se od sebe liší až na aditivní konstantu a píšeme ji jako

$$F(x) = \int f(x) dx$$

5.2 Integrály základních funkcí

Integrujte

$$\begin{aligned} & \int x^r dx, r \in \mathbb{R}, \quad \int \frac{dx}{x^\alpha}, \alpha \neq 1, \quad \int \frac{dx}{x} \\ & \int \sqrt{\xi} d\xi, \quad \int \frac{dy}{\sqrt{y}}, \quad \int e^x dy, \quad \int e^x dx \\ & \int x^n dx, n \in \mathbb{N}, \quad \int [ax^A + bx^B + cx^X] dx \\ & \int \cos \beta x dx, \quad \int \sin \omega t d\omega \\ & \int \cosh \beta x d\beta, \quad \int \sinh \omega t dt \\ & \int \frac{dt}{1+t^2} \quad \int e^{xy} dy \quad \int e^{xy^2} dx \quad \int e^{-aX} dX \end{aligned}$$

Integrujte dále odhadem a následnou zpětnou kontrolou derivováním:

$$\int \sqrt{1-x} dx, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

5.3 Per partes

Z derivace součinu $(fg)' = f'g + fg'$ odvodíme známé pravidlo integrace per partes (po částech) $\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$ kde doufáme v to, že "opačný" integrál již umíme spočítat. Spočítejte pomocí metody per partes tyto integrály:

- Nápověda: $f'(y) = 1$, $g(y) = \ln y$

$$\int \ln y dy$$

- Klasika I

$$\int \xi \ln \xi d\xi, \quad \int \zeta^2 e^{\alpha\zeta} d\zeta$$

- Klasika II

$$\int \cos \beta \sin \beta d\beta, \quad \int \cos^2 \omega d\omega$$

- Vyřešte integrály v předchozím bodě pomocí goniometrických vzorců pro dvojnásobek a polovinu argumentu.

5.4 Věta o substituci

Aneb dvojí použití věty o substituci. Začněme nejdříve tím, že věta o substituci vychází z věty o derivaci složené funkce, kde čárkou myslíme derivaci podle proměnné x a kde G je primitivní funkce k g :

$$[G(f(x))]' = g(f(x))f'(x)$$

1. Na tomto základě můžeme spočítat integrály typu

$$\int g(f(x))f'(x)dx = \int g(z)dz = G(f(x))$$

z toho, že spočítáme primitivní funkci G a provádíme tedy substituci $f(x) = z$. Jde tedy o to, abychom v integrandu identifikovali derivaci vnitřní funkce f' , která musí být argumentem funkce g .

Příklad:

Rešme substitucemi

- $f(x) = \sin x = z$, a tedy $g(z) = z^3$, integrál

$$\int \sin^3 x \cos x dx$$

- $f(x) = \sin x = z$, a tedy $g(z) = e^z$, integrál

$$\int e^{\sin x} \cos x dx$$

- $f(x) = x^2 = z$, $f'(x) = 2x$, a tedy $g(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z}}$, integrál

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

- $f(x) = 1 - x^2 = z$, $f'(x) = -2x$, a tedy $g(z) = z^{-\frac{1}{2}}$, integrál

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int z^{-\frac{1}{2}} dz = -z^{\frac{1}{2}} + C = -\sqrt{1-x^2} + C$$

- Spočítejte integrály z funkcí $[a \cos^3 x + b \cos^5 x] \sin x$

Nezapomeňte vždy nakonec dosadit do substituce, tj. vyjádřit výsledek v původní proměnné:

2. Druhý směr použití věty o substituci je zdánlivě paradoxní, ale také jej s výhodou používáme. Opět tedy použijeme větu

$$\int g(f(x))f'(x)dx = \int g(z)dz,$$

ale tentokrát "zprava doleva". To funguje zejména když ve jmenovateli $g(z)$ identifikujeme $f'(x)$, která se pak zkrátí. Musíme ale přijít s nápadem na funkci $z = f(x)$, nehledáme v čitateli již existující derivaci $f'(x)$. Dále je nutné spočítat si i inverzní funkci $x = f^{-1}(z)$ a ve výsledku pak zase vyjádřit z jako funkci x .

Poznámka: obdobně se počítá i substituce v komplexních integrálech, kde funkce $f(x)$ může mít význam nějaké křivky v komplexní rovině, např. $\varphi(t) = Re^{it}$, $t \in (0, 2\pi)$, je parametrizace kružnice o poloměru R .

Příklad:

Řešme substitucí $x = \sin t = \varphi(t)$ integrál

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx,$$

a to dle věty o substituci tentokrát ve značení

$$\int g(x) dx = \int g(\varphi(t))\varphi'(t) dt = H(t) + C = H(\varphi^{-1}(x)) + C$$

V tomto konkrétním případě tedy derivace vnitřní funkce $\varphi'(t) = \cos t$ zjednoduší integrand

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \cos t dt \quad (42)$$

$$= \int \sin t dt = -\cos t + C = -\sqrt{1-\sin^2 t} + C \quad (43)$$

$$= -\sqrt{1-\sin^2 \arcsin x} + C = -\sqrt{1-x^2} + C \quad (44)$$

kde jsme ještě potřebovali najít inverzní funkci $t = \arcsin x$. Vidíme, že substitucí se zkrátí jmenovatel s funkcí $\varphi'(t)$. Tj. tento způsob použití věty o substituci je výhodný, když po ní nově objevivší $\varphi'(t)$ nějak zjednoduší původní integrál, např. když se zkrátí s výrazem ve jmenovateli v původní funkci $g(x)$ (samozřejmě po substituci).

Pozn.: fyzik často operuje volněji se substitucí $z = f(x)$ a diferenciály ve smyslu $dz = f'(x) dx$ a "rozšířeními" typu

$$\int g(z) dz = \int g(z) \frac{dz}{dx} dx = \int g(f(x))f'(x) dx$$

5.5 Určitý integrál

Newtonovův vzorec

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

5.6 Integrály funkcí více proměnných

Věta o substituci, Jakobián.

Polární a sférické souřadnice.

Funkce více proměnných.

Křivkový a plošný integrál.

Stokesova věta.

Gradient, divergence, rotace, Laplace.

Vybrané funkce používané ve statistice a jejich vlastnosti a momenty.

Záměna derivace a integrálu

5.7 Gaussovské integrály

Jde o důležitou třídu určitých integrálů s Gaussovským jádrem.

Dokažte vztah

$$I(\alpha) \equiv \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

(spočítejte si Jakobián pro přechod od kartézských souřadnic x, y k polárním r, θ a spočítejte si podle Fubiniho věty $I^2(1) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2-y^2} dx dy$) a spočtěte s jeho využitím integrály

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{A} - \frac{x^2}{B}} dx, & \quad \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2+bx+c} dx \\ \int_{\mathbb{R}} e^{-a(x^2+ibx+c)} dx, & \quad \int_{\mathbb{R}} e^{a(ix-b)^2} dx \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-b)^2}{2a^2}} dx, & \quad \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-b)^2}{2a^2}} dx \\ \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} \cdot e^{-ikx} dx, & \quad \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-b)^2}{2a^2}} \cdot e^{-ikx} dx \end{aligned}$$

a spočítejte si také kvadrát absolutní hodnoty integrálů, jež vyjdou komplexní, tj. $|I|^2 \equiv II^*$.

Ze záměny derivace a integrálu pak spočtěte

$$J(\alpha) \equiv \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-\alpha x^2} dx, \quad K(\alpha) \equiv \int_{\mathbb{R}} x^4 e^{-\alpha x^2} dx$$

a jest tedy

$$J(\alpha) = -\frac{\partial}{\partial \alpha} I(\alpha), \quad K(\alpha) = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} I(\alpha)$$

popř. obecně i

$$\int_{\mathbb{R}} x^{2n} e^{-\alpha x^2} dx, \quad n \in \mathbb{N}$$

a dále si spočítejte integrály, které zderivujte podle parametru a aplikujte metodu per-partes

$$\mathcal{J}(\beta) = \int_0^{\infty} \cos \beta x e^{-x^2} dx, \quad \mathcal{I}(\beta) = \int_0^{\infty} \sin \beta x e^{-x^2} dx,$$

které vedou na diferenciální rovnici pro hledaný integrál. Nezapomeňte si vyhodnotit integrály pro $\beta = 0$.

Podobně zkoumejte (derivací podle parametru a per-partes) a nalezněte vztah mezi integrály

$$\mathcal{L}(\beta) = \int_0^{\infty} \cos^2 \beta x e^{-x^2} dx, \quad \mathcal{K}(\beta) = \int_0^{\infty} \sin^2 \beta x e^{-x^2} dx,$$

a to s využitím goniometrických vzorců a nalezeného výsledku $\mathcal{J}(\beta) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\beta^2/4}$.

5.8 Délka grafu funkce

5.9 Křivkové integrály skalárního a vektorového pole

6 Diferenciální rovnice

6.1 Kyvadlo jako harmonický oscilátor

Diferenciální rovnice pro časovou závislost úhlové souřadnice $\varphi(t)$ kyvadla je

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \sin \varphi,$$

kterou nelze přesně řešit. Odtud však linearizací (Taylorovým rozvojem funkce sinus do prvního řádu) získáme rovnici matematického kyvadla

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \varphi,$$

která má harmonické řešení a jde o rovnici lineárního harmonického oscilátoru. Lineární proto, že libovolná lineární kombinace dvou řešení je také řešením. Vyřešte rovnici násadou $e^{\omega t}$.

6.2 Homogenní diferenciální rovnice

Lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty jde o rovnice typu

$$\sum_{k=0}^n a_k y^{(k)}(x) = 0$$

kterou lze vyjádřit jako působení lineárního diferenciálního operátoru

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k}{dx^k}$$

na funkci $y(x)$. Řešení lze nalézt tak, že zkusíme hledat řešení ve tvaru (násada, ansatz) $e^{\lambda x}$, což pak vede na algebraickou rovnici

$$\sum_{k=0}^n a_k \lambda^k = 0$$

a sadu n kořenů λ_k a příslušných fundamentálních řešení diferenciální rovnice

$$\left\{ e^{\lambda_k x} \right\}_{k=1}^n,$$

přičemž některé kořeny mohou být i vícenásobné, ryze reálné, ryze imaginární, obecně komplexní apod. Obecné řešení je pak dáno jako libovolná lineární kombinace těchto báзовých funkcí

$$y(x) = \sum_{k=0}^n A_k e^{\lambda_k x}, A_k \in \mathbb{C}.$$

Lze také přejít k jiné bázi, např. od funkcí $\sin \lambda x$, $\cos \lambda x$ ke komplexním exponenciálám $e^{\pm i \lambda x}$.

Příklad:

Vyřešte rovnici

$$y'' - y' = 6y$$

a proveďte zkoušku, že i libovolná lineární kombinace dvou získaných řešení skutečně řeší danou diferenciální rovnici.

Řešte rovnice typu

$$y'(x) = 0 \quad ; \quad y'(x) = K \tag{45}$$

$$y'(x) = y(x) \quad ; \quad y'(x) = -y(x) \tag{46}$$

$$y''(x) = 0 \quad ; \quad y''(x) = K \tag{47}$$

$$y''(x) = Kx + B \quad ; \quad y''(x) = y(x) \tag{48}$$

$$y''(x) = -y(x) \quad ; \quad y''(x) = K^2 y(x) \tag{49}$$

$$y''(x) = -K^2 y(x) \quad ; \quad y'(t) = x, \tag{50}$$

kde $K > 0$, $B \in \mathbb{R}$

Příklad:

- Rovinné vlny v kvantové mechanice. Vyřešte rovnici

$$-i\hbar \frac{d}{dx} \psi_p(x) = p \psi_p(x), \quad p \in \mathbb{R}$$

- Schrödingerova rovnice I. Vyřešte rovnici

$$i\hbar \frac{d}{dt} \Phi(t) = E \Phi(t), \quad E \in \mathbb{R}$$

- Schrödingerova rovnice II. Vyřešte rovnici

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) = E \psi(x), \quad E > 0$$

6.3 Rovnice typu $y' = f(y)$

Pro rovnice typu

$$y' = f(y) \tag{51}$$

existuje známý a jednoduchý postup, který si fyzik vždy snadno odvodí následující tvořivou práci s diferenciály

$$\frac{dy}{dt} = f(y) \quad (52)$$

$$dy = f(y)dt \quad (53)$$

$$\int \frac{dy}{f(y)} = \int dt \quad (54)$$

$$\int \frac{dy}{f(y)} = t - t_0 \quad (55)$$

$$(56)$$

kde jsme integrační konstantu zapsali jako $-t_0$, a následně je potřeba invertovat řešení a nalézt funkci $y(t - t_0)$. Obdobně lze integrační konstantu zapsat jako určitý integrál, známe-li jako počáteční podmínku řešení v bodě t_0 , tj. $y(t_0) \equiv y_0$

$$\int_{y_0}^y \frac{dy'}{f(y')} = \int_{t_0}^t dt' = t - t_0$$

a opět je třeba invertovat.

Matematicky korektnější postup je s využitím věty o derivaci inverzní funkce. Definujme funkci $g(y) \equiv \frac{1}{f(y)}$ a k ní primitivní funkci $G(y)$, tj. takovou, že $G'(y) = g(y) = \frac{1}{f(y)}$. Z derivace inverzní funkce pak dokážeme, že implicitním řešením rovnice (51) je právě výraz

$$G(y) = t - t_0$$

Důkaz: hledaná funkce $y(t)$ je tedy rovna

$$y(t) = G^{-1}(t - t_0), \quad (57)$$

jejímž zderivováním podle věty o derivaci inverzní funkce dostaneme

$$y'(t) = (G^{-1}(t - t_0))' = \frac{1}{G'(G^{-1}(t))} = \frac{1}{g(y(t))} = f(y)$$

a tedy (57) opravdu řeší rovnici (51).

Příklad:

Řešte rovnice

- $y'(t) = 1 + y^2(t)$
- $y'(t) = \sqrt{1 - y^2(t)}$

6.4 Rovnice typu $y'(t) = h(t)f(y)$

Rovnice typu $y'(t) = h(t)f(y)$ má řešení

$$y(t) = G^{-1}(H(t)),$$

kde G je primitivní funkce k $g \equiv 1/f$ a H je primitivní funkce k h . Důkaz je veden stejně jako v případě v předchozí sekci pomocí derivace inverzní a dále i složené funkce, zkuste si sami. Také si můžete pohrát s diferenciály jako fyzik z minulého století:)

Příklad:

Řešte rovnice

- $y'(t) = \frac{1}{t}\sqrt{1 - y^2(t)}$

6.5 Metoda integračního faktoru

Rovnici 1. řádu typu

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x)$$

lze řešit metodou integračního faktoru

$$R(x) \equiv e^{\int p(x) dx} \equiv e^{P(x)}$$

kde $P(x)$ je primitivní funkce k $p(x)$. Integračním faktorem rovnici vynásobíme

$$\begin{aligned}y'(x) R(x) + p(x) R(x) y(x) &= q(x) R(x) . \\y'(x) e^{\int p(x) dx} + p(x) e^{\int p(x) dx} y(x) &= q(x) R(x) . \\y'(x) e^{P(x)} + p(x) e^{P(x)} y(x) &= q(x) R(x) .\end{aligned}$$

Na levé straně lze tedy identifikovat

$$\left[y(x) e^{P(x)} \right]' = q(x) R(x) .$$

Tuto rovnici lze vyintegrovat

$$y(x) R(x) = \int q(x) R(x) dx$$

a řešením původní diferenciální rovnice je

$$y(x) = e^{-\int p(x) dx} \int q(x) e^{\int p(x) dx} dx .$$

Speciální rovnici prvního řádu jsme tak formálně vyřešili postupně dvěma integracemi.

6.6 Nehomogenní diferenciální rovnice, variace konstant

TODO

6.7 Speciální případ rovnice druhého řádu

V dalším budeme derivací značenou čárkou rozumět derivaci podle souřadnice, na které závisí nějaká funkce z , tj. třeba $z' \equiv \frac{dz(t)}{dt}$.

Rovnici druhého řádu typu

$$z'' = f(z) \tag{58}$$

lze řešit následujícím trikem, a to vynásobením obou stran rovnice funkcí $2z'$

$$2z' z'' = 2z' f(z) .$$

Platí totiž $(z'^2)' = 2z' z''$ a tedy rovnici lze upravit

$$(z'^2)' = 2z' f(z) . \tag{59}$$

Najdeme-li však primitivní funkci k $f(z)$, tj. najdeme-li takovou $F(z)$, že $\frac{dF(z)}{dz} = f(z)$, pak z derivace složené funkce, $F(z(t))$ podle t jest

$$F'(z) = f(z) z'$$

a rovnici (59) můžeme jednou vyintegrovat na výraz

$$z'^2 = 2F(z) + C$$

po čemž je pak už jen potřeba vyřešit dalším integrálem rovnici

$$z' = \pm \sqrt{2F(z) + C} .$$

Rovnici druhého řádu (58) jsme tak vyřešili postupným integrováním, což ne vždy takto jednoduše lze, šlo o speciální případ.

7 Parciální diferenciální rovnice ve fyzice – přehled

Označme

$$\partial_t \equiv \frac{\partial}{\partial t}, \quad \partial_{tt} \equiv \partial_t^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad \partial_x \equiv \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_{xx} \equiv \partial_x^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

a dále pro trojrozměrný případ

$$\partial_i \equiv \partial_{x_i} \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Vlnová rovnice (Jean-Baptiste le Rond d'Alembert, 1746) je rovnice typu

$$\left(\frac{1}{v^2} \partial_{tt} - \partial_{xx} \right) f(x, t) = 0$$

Ukažte si, že každá funkce $\psi \equiv \psi(x \pm vt)$ je jejím řešením, a tedy vlnovou rovnici splňují časoprostorové funkce, které zachovávají tvar vlny, vlna se v čase jen posunuje.

Schrödingerova rovnice (1926) je v jednorozměrném případě rovnice typu

$$[-K^2 \partial_{xx} + V(x)] \Psi(x, t) = i\hbar \partial_t \Psi(x, t), \quad K^2 > 0$$

popř. v bezčasové formě

$$[-K^2 \partial_{xx} + V(x)] \psi(x, t) = E \psi(x, t), \quad K^2 > 0, E \in \mathbb{R}$$

Laplaceův operátor v kartézských souřadnicích má tvar

$$\Delta \equiv \nabla \cdot \nabla \equiv \nabla^2 = \sum_{i=1}^3 \partial_i^2$$

D'Alembertův vlnový operátor

$$\square \equiv \frac{1}{c^2} \partial_{tt} - \Delta$$

Klein-Gordonova rovnice (1926) je rovnice typu

$$[\square + K^2] \psi(t, \vec{x}) = 0$$

Laplaceův operátor ve sférických souřadnicích.

Rovnice vedení tepla (Joseph Fourier, 1822)

$$\partial_t u(t, \vec{x}) = \alpha \Delta u(t, \vec{x}), \quad \alpha > 0$$

8 Diracova delta distribuce a konvoluce

8.1 Delta distribuce

Definice: delta "funkcí" (správněji zobecněnou funkcí, distribucí) $\delta(x - a) \equiv \delta_a(x)$ rozumíme matematický objekt, který se po přeintegrování s nějakou pěknou hladkou a v nekonečnu ubývající funkcí $f(x)$ chová tak, že vybere funkční hodnotu $f(x)$ v bodě a , tj.

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(x - a) f(x) dx \equiv (\delta_a, f) = f(a).$$

Vlastnosti delta "funkce" Speciálně tedy

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(x) f(x) dx = f(0).$$

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(x - a) dx = 1.$$

Definice pomocí Fourierovy transformace

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} dk$$

aneb delta funkce jako Fourierova transformace jedničky.

Delta funkce jako derivace Heavisidaovy skokové funkce

$$\delta(x - a) = \frac{d}{dx} \Theta(x - a)$$

kde $\Theta(x - a) = 1$ pro $x > a$, jinak nula.

Delta distribuce jako limita funkcí. TODO.

Derivace delta funkce

Z integrace per partes

$$(f, \delta') = -(f', \delta)$$

tj. např.

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \delta'(x - a) dx = -f'(a)$$

a obecně

$$(f, \delta^{(n)}) = (-1)^n (f^{(n)}, \delta)$$

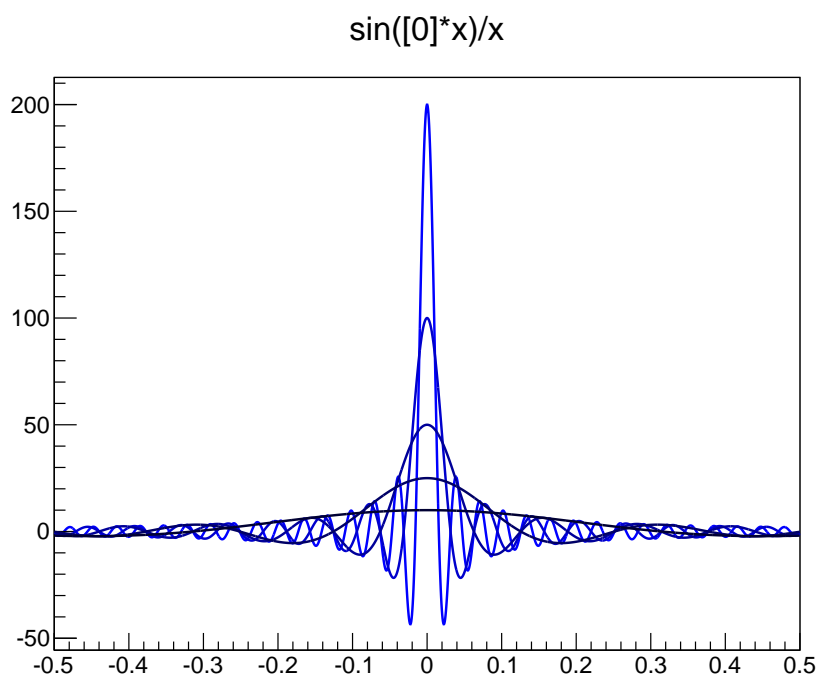
Práce s delta funkcí

$$\delta(g(x)) = \sum_{x_0} \frac{\delta(x - x_0)}{|g'(x_0)|},$$

kde x_0 jsou kořeny rovnice $g(x) = 0$ Více viz např. [1].

Příklad: upravte integrály

$$\int_{\mathbb{R}} f(p) \delta(\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} - E) dp, \quad \int_{\mathbb{R}} g(p) \delta(p^2 c^2 + m^2 c^4 - E^2) dp$$



Obrázek 4: Optická konvergence funkcí $\sin \frac{Ax}{x}$ k δ -funkci.

8.2 Konvoluce

Konvoluce dvou funkcí je definována jako

$$(f * g)(x) \equiv \int_{\mathbb{R}} f(z)g(x - z)dz = \int_{\mathbb{R}} g(z)f(x - z)dz = (f * g)(x)$$

a je tedy symetrická. Statistický a fyzikální význam: jsou-li zdrojem nějakého typu signálu dva procesy, např. nějaké pozadí (tepelné fluktuace, šum aj.) a dále nějaký fyzikální signál, kde každý proces má svou hustotu pravděpodobnosti k němu příslušného signálu, je výsledný součet fyzikálního signálu a šumu rozdělen podle funkce, která je dána konvolucí hustot pravděpodobnosti šumu a fyzikálního signálu. Např. spektrální čára s teoretickým Lorentzovým rozdělením je "rozmazána" gaussovským tepelným šumem pohybu molekul a také nějakým přístrojovým šumem. Pozorovaný tvar čáry je dán konvolucí Gaussova a Lorentzova rozdělení (tzv. Voigtian) a větší šířce, než je přirozená šířka čáry.

9 Fourierovy řady

Cílem je zkusit reprezentovat funkci periodickou na intervalu $(-\pi, \pi)$ řadou (obecně nekonečným součtem) harmonických funkcí sinus a kosinus. Následně můžeme např. v rámci jednoduchosti a za cenu nižší přesnosti pracovat s konečným počtem členů v řadě. Pišme tedy

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} [b_k \sin kx + a_k \cos kx].$$

Lze zkoumat konvergenci takovéto řady bodově pro různá x jakožto i konvergenci v normě. My si uvedeme jen recept, jak řadu najít. Jednotlivé koeficienty nám říkají, jak moc je v dané řadě zastoupen daný sinus či kosinus o dané frekvenci.

Jak najít koeficienty a_k a b_k ?

Definujme skalární součin dvou funkcí jako jejich integrál přes periodu $(-\pi, \pi)$

$$(g(x), h(x)) \equiv \int_{-\pi}^{\pi} g(x)h(x)dx.$$

Podle toho lze spočítat jako cvičení, že

$$(\sin nx, \sin kx) = \pi \delta_{nk} \quad (60)$$

$$(\cos nx, \sin kx) = 0 \quad (61)$$

$$(\cos nx, \cos kx) = \pi \delta_{nk} \quad (62)$$

a jde tedy o systém nezávislých a ortogonálních funkcí.

Přintegrováním rozvoje $f(x)$ s funkcí $\sin mx$ řady tak získáme

$$(f(x), \sin mx) = \pi b_m$$

a obdobně

$$(f(x), \cos mx) = \pi a_m$$

což dává hledaný recept pro koeficienty

$$b_k = \frac{1}{\pi} (f(x), \sin kx) \quad (63)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} (f(x), \cos kx) \quad (64)$$

Protože vyprůměrováním hodnot funkcí sinus i kosinus přes interval jejich periody dává nulu

$$(1, \sin kx) = 0$$

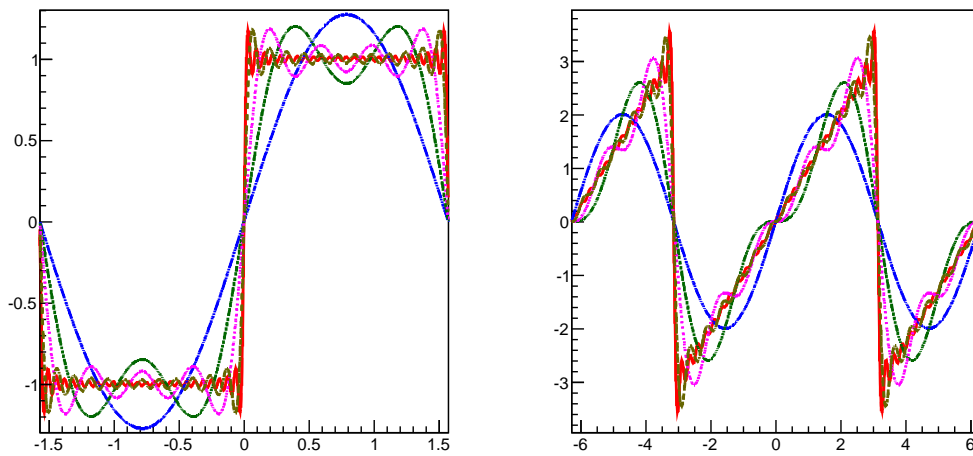
$$(1, \cos kx) = 0$$

má koeficient $a_0/2$ význam průměru funkční hodnoty $f(x)$ na daném intervalu.

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{\pi} (f(x), 1)$$

Zobecnění na periodu délky L .

Zápís pomocí komplexní exponenciály



Obrázek 5: Příklady částečných součtů Fourierovy řady pro pravoúhlý pulz a pilovitou funkci.

10 Fourierova transformace

Motivace: ucho jako Fourierovský analyzátor:) Jde o jakési zobecnění Fourierových řad pro funkce, jejíž "perioda" je \mathbb{R} . Jedna z vhodných definic Fourierovy a k ní inverzní Fourierovy transformace funkce jedné proměnné je následující konvence

$$\hat{f}(k) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{ikx} dx$$

$$f(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(k) e^{-ikx} dk$$

Fourierova transformace tedy funkci reálné proměnné $f(x)$ přiřazuje obecně komplexní funkci $\hat{f}(k)$, která, volně řečeno, říká, "jak moc" jsou v původní funkci zastoupeny spojité frekvence k . Často se lze také setkat se zápisem

$$\mathcal{F}[f(x)](k) \equiv \hat{f}(k)$$

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(k)](x) \equiv f(x)$$

popř. pouze

$$\mathcal{F}[f] \equiv \hat{f}$$

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}] \equiv f$$

a požadavek inverzní transformace znamená

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]] = f.$$

Poslední rovnost lze použít nejen k důkazu toho, že transformace jsou si skutečně inverzní, ale lze současně i nahlédnout jistou volnost ve volbě konstant vystupujících v definicích. Definujme

$$\hat{f}(k) \equiv A \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{iBkx} dx \equiv \mathcal{F}[f](k)$$

$$f(x) \equiv \tilde{A} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(k) e^{i\tilde{B}kx} dk \equiv \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](x)$$

a požadujeme, aby $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]] = f$. Dostáváme požadavek

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(k)](x) = \mathcal{F}^{-1} \left[A \int_{\mathbb{R}} f(x') e^{iBkx'} dx' \right] = A\tilde{A} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x') e^{iBkx'} dx' \right) e^{i\tilde{B}kx} dk$$

$$f(x) = A\tilde{A} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x') e^{ik(Bx' + \tilde{B}x)} dk dx'$$

Vidíme, že musí platit

$$A\tilde{A} \int_{\mathbb{R}} e^{ik(Bx' + \tilde{B}x)} dk = \delta(x' - x)$$

neboť pak opravdu

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x') \delta(x' - x) dx' = f(x) \quad \blacksquare$$

Jak to zaručit? Z definice delta funkce

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} dk = \delta(-x)$$

je jasné, že požadavek návratu k původní funkci aplikací inverzní transformace lze zajisti např. tak, že

$$A\tilde{A} = \frac{1}{2\pi}, \quad B = -\tilde{B} = 1$$

popř. substitucí v integrálu $\tilde{k} \equiv Bk$

$$\frac{A\tilde{A}}{B} \int_{\mathbb{R}} e^{i\tilde{k}(x-x')} d\tilde{k} = \delta(x-x')$$

a tedy obecněji i tak, že

$$A\tilde{A} = B \frac{1}{2\pi}$$

Nejčastější volby jsou

- Symeticky (geometrický průměr:), tj. $A = \tilde{A} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
- One-way faktor 2π , tj. např. $A = \frac{1}{2\pi}, \tilde{A} = 1$
- "All π 's in exponent", tj. $B = 2\pi = -\tilde{B}, A = \tilde{A} = 1$

Věta: Fourierův obraz konvoluce dvou funkcí je součin jejich Fourierových obrazů.

Vztah mezi šířkou vzoru a obrazu.

Fourierovu transformaci lze zobecnit i pro funkce více proměnných, např. konvencí

$$\hat{f}(\vec{k}) \equiv \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{x}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^n x$$

$$f(\vec{x}) \equiv \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^n k$$

10.1 Diskrétní Fourierova transformace

Pro diskrétní funkci a_n , tj. přesněji množinu čísel a_n "závislých" na diskrétním indexu n můžeme definovat diskrétní Fourierovu transformaci např. jako

$$\hat{a}_k \equiv \sum_n e^{2\pi i kn} a_n$$

V praxi je hojně využíván efektivní rekurzivní algoritmus FFT (Fast Fourier Transform).

Fourierova transformace a s ní spjatá frekvenční analýza signálu má velkou aplikaci v elektronice, zpracování obrazu a zvuku aj.

Příklad:

Spočítejte si Fourierovu transformaci funkce, která je rovna hodnotě a na intervalu $x \in (-a/2, a/2)$ a jinak nula (pravoúhlý pulz, v matematice charakteristická funkce intervalu). Zjistíte, že v pravoúhlém pulzu jsou zastoupeny všechny frekvence, a to podle funkce $\sim \text{sinc}(Ax) \equiv \frac{\sin(Ax)}{x}$. Rozšiřování intervalu $x \in (-a/2, a/2)$ vede ke

konstatní funkci, a efektivně k delta funkci ve Fourierově obraze. Široký pulz tedy obsahuje "méně" frekvencí, zatímco krátký pulz (téměř delta funkce) obsahuje naopak skoro všechny frekvence (jeho transformací je široký sinc, téměř konstanta).

Příklad:

Fourierova transformace Gaussovy křivky je opět Gaussovka (jedná se tak o určitý "funkční invariant" vůči Fourierově transformaci:)

11 Greenovy funkce

V tomto oddíle se podíváme na způsob řešení diferenciálních rovnic metodou Fourierovy transformace a s pomocí tzv. Greenovy funkce. Motivace: chceme umět řešit rovnici, tj. najít funkci $y(x)$, tak, že

$$\mathcal{D}[y(x)] = f(x)$$

a to pro různé zdroje (pravé strany) $f(x)$, a kde operátor \mathcal{D}_x je nějakým "polynomem" v derivacích, tj. nějaký lineární diferenciální operátor s konstantními koeficienty

$$\mathcal{D}_x \equiv P_n \left(\frac{d}{dx} \right) \equiv \sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k}{dx^k} \quad a_k \in \mathbb{C}.$$

$$P_n(\xi) \equiv \sum_{k=0}^n a_k \xi^k$$

Podívejme se na speciální případ, kdy pravou stranou je delta funkce. Nechť tedy nějaká funkce $G(x)$ řeší diferenciální rovnici s konstantními koeficienty

$$\mathcal{D}_x[G(x)] = \delta(x).$$

Funkci $G(x)$ budeme říkat Greenova.

Věta: ukážeme si, že řešení $y(x)$ rovnice s obecnou pravou stranou $f(x)$

$$\mathcal{D}[y(x)] = f(x)$$

je funkce, jež je dána konvolucí Greenovy funkce a "pravé strany":

$$y(x) = (G * f)(x) = \int_{\mathbb{R}} G(x-y)f(y)dy.$$

To je velmi užitečné a hezké! Jak to funguje?

Důkaz 1:

Přímou aplikací diferenciálního operátoru na konvoluci. Všimněte si, že operátor derivuje podle x , tj. necháme ho projít do integrálu, a bude derivovat pouze Greenovu funkci. S využitím toho, že $G(x)$ řeší rovnici s delta funkcí na pravé straně dostaneme

$$\mathcal{D}_x[y(x)] = \mathcal{D}_x \left[\int_{\mathbb{R}} G(x-y)f(y)dy \right] = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{D}_x G(x-y)f(y)dy = \int_{\mathbb{R}} \delta(x-y)f(y)dy = f(x). \quad \blacksquare$$

Důkaz 2:

Budeme řešit diferenciální rovnici ve Fourierově obraze. Použijeme fakt, že Fourierův obraz delta funkce je jednička

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} dk$$

a zdefinujeme si funkci $f(x)$ pomocí jejího Fourierova obrazu $\hat{f}(k)$

$$f(x) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) e^{ikx} dk$$

a obdobně si také zapíšeme hledanou Greenovu funkci

$$G(x) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{G}(k) e^{ikx} dk. \quad (65)$$

Všimněte si, že si takto vlastně definujeme zpětnou Fourierovu transformaci, a v tomto příkladě si volíme (kvůli definici delta funkce) faktor $1/2\pi$ do transformace "zpět", zatímco transformace "tam" byla bez faktoru $1/2\pi$.

Funkce $G(x)$ ze své definice jako Greenova funkce splňuje

$$\mathcal{D}_x[G(x)] = \delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} dk$$

a tedy

$$\mathcal{D}_x[G(x)] = \frac{1}{2\pi} \mathcal{D}_x \int_{\mathbb{R}} \hat{G}(k) e^{ikx} dk = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{G}(k) P_n(ik) e^{ikx} dk = \delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} dk,$$

kde jsme použili fakt, že operátor \mathcal{D}_x působí pouze na exponenciálu, a protože $\frac{d}{dx} e^{ikx} = ik e^{ikx}$, platí

$$\mathcal{D}_x e^{ikx} = P_n(ik) e^{ikx}.$$

Z porovnání integrandů

$$\hat{G}(k) P_n(ik) e^{ikx} = e^{ikx}$$

a vidíme, že Fourierův obraz Greenovy funkce je jednoduše algebraická inverze

$$\hat{G}(k) = \frac{1}{P_n(ik)},$$

tj. "jedna lomeno" nějaký polynom v k ! Tímto jsme však zatím našli pouze Fourierův obraz $\hat{G}(k)$. Hledání Greenovy funkce $G(x)$ je tedy převedeno na problém nalezení zpětné Fourierovy transformace, tj. výpočet integrálu (65), který se často řeší pomocí komplexního křivkového integrálu a pomocí reziduové věty.

Vraťme se ale zpět k důkazu:) Funkce $y(x)$ splňuje

$$\mathcal{D}_x[y(x)] = \frac{1}{2\pi} \mathcal{D}_x \int_{\mathbb{R}} \hat{y}(k) e^{ikx} dk = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{y}(k) P_n(ik) e^{ikx} dk.$$

Protože však platí, že Fourierova transformace konvoluce dvou funkcí je součin jejich Fourierových obrazů, platí

$$\hat{y}(k) = \hat{G}(k) \cdot \hat{f}(k)$$

a tedy

$$\mathcal{D}_x[y(x)] = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{G}(k) \hat{f}(k) \mathcal{D}_x e^{ikx} dk = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{G}(k) \hat{f}(k) P_n(ik) e^{ikx} dk$$

a s uvažováním

$$\hat{G}(k) = \frac{1}{P_n(ik)}$$

máme konečně

$$\mathcal{D}_x[y(x)] = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(k) e^{ikx} dk = f(x) \quad \blacksquare$$

Tj. $y(x)$ definováno jako konvoluce Greenovy funkce a zdroje "na pravé straně" skutečně řeší diferenciální rovnici

$$\mathcal{D}_x[y(x)] = f(x).$$

Výhodou je, že známe-li Greenovu funkci, můžeme najít řešení nehomogenní rovnice s libovolnou pravou stranou tím, že spočítáme konvoluční integrál, a nemusíme pokaždé řešit jinou diferenciální rovnici.

Příklad:

Řešme metodou Greenovy funkce ve Fourierově obraze rovnici

$$-y'' + K^2 y = f(x), \quad K^2 > 0$$

tj. hledíme

$$-G''(x - x_0) + K^2 G(x - x_0) = \delta(x - x_0), \quad x_0 \in \mathbb{R}$$

která by měla zaručit možnost najít řešení rovnice "s pravou stranou" jako

$$y(x) = (f * G_{x_0})(x)$$

Zpětnou transformaci nakonec provedeme pomocí reziduové věty. TODO!

12 Geometrie

Spočítejte počet povrchových kostek na Rubikově kostce o n krychličkách. Vyhodnoťte a ověřte si pro $n = 1 \dots 5$. Expandujte případně výraz do polynomu v n a diskutujte možné geometrické přístupy.

13 Goniometrické identity

Funkce sinus a cosinus jako lichá a sudá část Taylorova rozvoje komplexní exponenciály. TODO!

Exponenciela jako limita

$$e^x = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N$$

Moivrova věta

$$(\cos \varphi \pm i \sin \varphi)^N = \cos N\varphi \pm i \sin N\varphi$$

Eulerova identita:

$$e^{\pm i\varphi} = \cos \varphi \pm i \sin \varphi$$

a dle

$$\cos(\alpha \pm \beta) + i \sin(\alpha \pm \beta) = e^{i(\alpha \pm \beta)} = e^{i\alpha} e^{\pm i\beta}$$

rozpisem a srovnání reálných a imaginárních částí výrazů:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

odkud

$$2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$$

$$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$$

Speciálně

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}, \quad \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$$

Hyperbolické funkce: TODO!

14 Lineární algebra

الجبر

أبو عبد الله محمد بن موسى الخوارزمي ابو جعفر

Obrázek 6: Al-Džabra. Termín Algebra pochází z arabštiny, zavedl jej matematik Abú Abd Alláh Muhammad Ibn Músá **al-Chórezmí** Abú Dža'far (c. 780–850), jehož jméno se stalo základem slova algoritmus, a který zavedl neznámou a její označení jako X (Wikipedia).

Vektorový prostor, matice, zobrazení, determinant, inverzní matice, diagonalizace. Vlastní čísla a vlastní vektory. Skalární a vnější součin. Exponenciála matice, stopa.

14.1 Matice

Maticový součin pro matici n -sloupcovou matici A a n -řádkovou matici B definujeme jako

$$C \equiv AB \quad (66)$$

$$(C)_{ij} = (AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik}B_{kj} \quad (67)$$

a obecně $AB \neq BA$, tj. matice spolu obecně nekomutují, a jejich komutátor $[A, B] \equiv AB - BA$ je obecně nenulový.

Ukažte si, že zobecněním vztahu pro $a, b \in \mathbb{R}$

$$(a - ib)(a + ib) = a^2 + b^2$$

ja pro matice

$$(A - iB)(A + iB) = A^2 + B^2 + i[A, B].$$

Mají-li dvě matice A a B nulový komutátor $[A, B] = 0$, říkáme, že A a B spolu komutují. Platí $[A, B] = -[B, A]$ a dále (dokažte si rozepsáním posledního vztahu)

$$[AB, C] = ABC - CAB = ABC - CAB + ACB - ACB = A[B, C] + [A, C]B$$

Platí dále Jacobiho identita (dokažte si přímým rozepsáním!)

$$[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0$$

Transpozice matice: jde o výměnu rolí řádků a sloupců, matice se "překlopí" okolo diagonály. Matematicky

$$(A^T)_{ij} = A_{ji}.$$

Ukažte, že pro libovolné dvě matice A a B (jedna z nich může být sloupcovým či řádkovým vektorem)

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Ukažte si poslední rovnost v zápisu maticového násobení pomocí sum

$$(AB)_{ij}^T \equiv (AB)_{ji} = \dots$$

Stopa matice je součet diagonálních prvků $\text{Tr}A = \sum_i A_{ii}$. Dokažte si, že stopa součinu matic nezávisí na pořadí,

$$\text{Tr}AB = \text{Tr}BA$$

a obecněji jde o tzv. cykličnost stopy

$$\text{Tr}ABC = \text{Tr}BCA = \text{Tr}CAB$$

Determinant matice

14.2 Rotace v \mathbb{R}^2

Matice pootočení o úhel α v rovině je dána

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}. \quad (68)$$

Spočtete vlastní vektory a vlastní čísla této matice.

Ukažte si přímým výpočtem inverzní matice, že její inverzí je matice

$$R^{-1}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = R(-\alpha), \quad (69)$$

a ukažte si, že opravdu

$$R(\alpha)R^{-1}(\alpha) = \mathbb{1}$$

Ukažte pomocí součtových vzorců goniometrických funkcí, že

$$R(\alpha)R(\beta) = R(\alpha + \beta)$$

Pomocí Taylorova rozvoje funkcí \sin a \cos si ukažte, že pro malé úhly platí pro tzv. infinitezimální rotace

$$R(\epsilon) \approx \begin{pmatrix} 1 & -\epsilon \\ \epsilon & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} + \begin{pmatrix} 0 & -\epsilon \\ \epsilon & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{1} - i\epsilon \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \equiv \mathbb{1} - i\epsilon M \quad (70)$$

Spočtete si mocniny matice M^2 a M^3 . Pro libovolně velké rotace pak lze psát ve smyslu Taylorova rozvoje exponenciály následující exponenciálu matice

$$R(\alpha) = \exp[-i\alpha M],$$

kde o matici M se hovoří jako o generátoru rotace. Ukažte si, že ze znalosti Taylorova rozvoje exponenciály a mocnin matice M opravdu dostanete

$$R(\alpha) = \exp[-i\alpha M] = \cos \alpha \mathbb{1} + \sin \alpha \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (71)$$

Zderivováním

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} R(\alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} e^{-i\alpha M} = -iM e^{-i\alpha M}$$

ukažte, že generátor rotace M lze vyjádřit jako

$$M = i \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} R(\alpha) \right|_{\alpha=0}$$

Ověřte si také první výsledek zderivováním $R(\alpha)$ ve tvaru 68 a maticovým násobením s explicitním vyjádřením M , a derivaci exponenciály si také ověřte derivací Taylorova rozvoje exponenciály matice A

$$e^{iA} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iA)^k}{k!} = \mathbb{1} + iA + \frac{(iA)^2}{2!} + \dots$$

Obdobně lze pomocí Taylorova rozvoje funkce $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ definovat i libovolnou funkci matice $f(A)$.

Příklad exponenciály operátoru: z Taylorova rozvoje exponenciály ukažte, že

$$e^{-a \frac{d}{dx}} f(x) = f(x - a)$$

a tedy že jde o operátor posunutí:)

14.3 Vlastní čísla a vlastní vektory

Spočítejte vlastní čísla a vlastní vektory matice rotace $R(\alpha)$. Měli byste dostat $\lambda_{\pm} = e^{\pm i\alpha}$.

Koncept vlastních vektorů a čísel lze rozšířit z matic i na operátory a funkce, což má velkou aplikaci v kvantové mechanice, ale i v analýze. Exponenciála je tak například vlastní funkcí operátoru derivace. Zapiště matici derivace D v bázi, ve které ztotožní kanonické vektory s funkcemi $1, x, x^2, \dots$. Zapiště si vektor odpovídající exponenciální funkci, a ukažte si, že je vlastním vektorem matice D .

Diagonalizujte matici přechodem do báze vlastních vektorů. Podobnostní transformace.

14.4 Další transformace

Najděte matice, jejich vlastní čísla a jejich vlastní vektory, odpovídající na prostoru \mathbb{E}^2

- Z_y , zrcadlení okolo osy y
- Z_x , zrcadlení okolo osy x
- P , prostorová inverze $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$
- T , záměna $x \leftrightarrow y$

a spočítejte komutátory těchto matic mezi sebou a s maticí rotace $R(\alpha)$.

14.5 Skalární součin

14.5.1 Reálné prostory

Na reálných prostorech je skalární součin zobrazení, které dvěma vektorům $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ přiřadí reálné číslo např. podle předpisu

$$(\vec{a}, \vec{b}) \equiv \vec{a} \cdot \vec{b} \equiv \vec{a}^T \vec{b} \equiv \sum_{i=1}^n w_i a_i b_i, \quad w_i > 0.$$

Skalární součin je lineární, což plyne z výše uvedené definice a distributivnosti násobení

$$(\alpha \vec{x} + \beta \vec{y}, \gamma \vec{z}) = \alpha \gamma (\vec{x}, \vec{z}) + \beta \gamma (\vec{y}, \vec{z}), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Platí, že skalární součin vektoru "se sebou" je pozitivní číslo, a lze pomocí něj definovat jeho velikost (normu). Často se volí $w_i \equiv 1$ a jde pak o známý skalární součin s vlastnostmi

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \Delta\phi_{ab}.$$

Je-li skalární součin dvou vektorů nula, hovoříme o kolmých vektorech. Pro $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 0$ a pro $\vec{c} \equiv \vec{a} + \vec{b}$ platí Pythagorova věta (Pythagoras ze Samu)

$$|\vec{c}|^2 = (\vec{c}, \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}) = |\vec{a}|^2 + (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{b}, \vec{a}) + |\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$$

Pozn.: Minkowského prostor je prostor se signaturou skalárního součinu, tj. hodnotou vah w_i , daných $(1, 1, 1, -1)$ nebo $(-1, -1, -1, 1)$ a skalární součin dvou čtyřvektorů je definován např. jako

$$(x^\mu, y^\mu) = x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y}.$$

14.5.2 Komplexní prostory

Na komplexních prostorech $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{C}^n$

$$(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \sum_{i=1}^n u_i^* v_i = (\vec{v}, \vec{u})^*$$

Ukažte si poslední rovnost. Dále odtud platí

$$(\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}, \gamma \vec{w}) = \gamma \alpha^* (\vec{u}, \vec{w}) + \gamma \beta^* (\vec{v}, \vec{w}), \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}.$$

14.5.3 Invariance skalárního součinu

Ukažte, že skalární součin je invariantní vůči rotaci, tj. že

$$\vec{a}' = R(\alpha) \vec{a} \tag{72}$$

$$\vec{b}' = R(\alpha) \vec{b} \tag{73}$$

$$\vec{a}'^\top \vec{b}' = \vec{a}^\top \vec{b} \tag{74}$$

a to jak formálně pomocí transpozice s využitím toho, že

$$R^\top(\alpha) = R^{-1}(\alpha)$$

a dále pomocí maticového násobení na příkladě nám známé rotační matice v \mathbb{R}^2 .

14.6 Hermitovsky sdružená matice

K matici A definujeme tzv. hermitovsky sdruženou matici A^\dagger tak, aby pro libovolné vektory $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ platilo, že ve skalárním součinu lze převést působení matice A na jeden vektor na působení matice A^\dagger na vektor ve druhé složce

$$(\vec{x}, A\vec{y}) = (A^\dagger \vec{x}, \vec{y}).$$

Zkuste si nakreslit, že v případě rotace $R(\alpha)$ je $R^\dagger(\alpha) = R(-\alpha) = R^\top(\alpha) = R^{-1}(\alpha)$. Je-li $A = A^\dagger$, mluvíme o tzv. matici hermitovské, samosdružené. Pro matice dále platí, že $A^\dagger = (A^\top)^*$.

Pro matici rotace nyní můžeme elegantně ukázat invarianci skalárního součinu dvou vektorů vůči rotaci následovně

$$(R(\alpha)\vec{x}, R(\alpha)\vec{y}) = (\vec{x}, R^\dagger(\alpha)R(\alpha)\vec{y}) = (\vec{x}, R^{-1}(\alpha)R(\alpha)\vec{y}) = (\vec{x}, \vec{y}).$$

15 Vektorová algebra, sumy, tenzory

Kroneckerův symbol. Levi-Civitův symbol. Vektorový součin. Záměna derivace a sumy.

15.1 Čtyřvektory

Minkowského prostoročas. Pseudoeuklidovský prostor, signatura skalárního součinu.

15.2 Grupy a algebry

Spočítejte vlastní čísla, vlastní vektory, stopu a determinat každé z trojice Pauliho matic ve standardní reprezentaci

$$\vec{\sigma} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] \quad (75)$$

Antisymetrická matice. Grupy, Lieova algebra jako tečna ke grupě. Generátory, infinitezimální a konečné rotace a transformace.

15.3 Hrátky

Rubikovy kostky

Počet povrchových kostek

Podprostory

Cyklický posun a převrácení 3 kelímků

16 Základy komplexní analýzy

Eulerova formule. Spojitost komplexní funkce. Cauchy-Riemannovy podmínky. Cauchyho vzorec pro kruh. Laurentova řada, reziduum. Reziduová věta. Aplikace pro výpočet integrálů.

17 Speciální polynomy

Ortogonalizace polynomů vůči danému skalárnímu součinu na daném intervalu a s danou vahou vede na systémy ortogonálních polynomů, které mají rozsáhlé aplikace ve fyzice.

17.1 Legendreovy polynomy

Legendreovy polynomy

přidružené Legendreovy polynomy

17.2 Hermiteovy polynomy

17.3 Laguerrovy polynomy

17.4 Čebyševovy polynomy

17.5 Besselovy a Neumannovy funkce

18 Variační počet**

Euler-Lagrangeovy rovnice.

19 Grassmanova algebra**

A Komplexní čísla

Komplexní číslo má reálnou a imaginární část

$$z = \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z),$$

kde $\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z) \in \mathbb{R}$. Komplexně sdružené číslo značíme hvězdičkou a platí

$$z^* = \operatorname{Re}(z) - i \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Re}(z^*) + i \operatorname{Im}(z^*), \quad \text{spec. } i^* = -i$$

Polární tvar komplexního čísla

$$z = |z|e^{i\delta}, \quad \delta \in \mathbb{R},$$

kde $|z|$ je velikost (modul) komplexního čísla a platí

$$|z| = \sqrt{(\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2} = \sqrt{zz^*}$$

$$|z|^2 = (\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2 = zz^*$$

Komplexní jedničku $e^{i\delta}$ lze zapsat pomocí Taylorova rozvoje Eulerovým vzorcem jako

$$e^{\pm i\delta} = \cos \delta \pm i \sin \delta$$

a tedy

$$\cos \delta = \frac{e^{i\delta} + e^{-i\delta}}{2}, \quad \sin \delta = \frac{e^{i\delta} - e^{-i\delta}}{2i}.$$

Další triviální identity:

$$(e^{\pm i\delta})^* = e^{\mp i\delta} = \cos \delta \mp i \sin \delta$$

$$\left(\frac{a+ib}{c+id}\right)^* = \left(\frac{a-ib}{c-id}\right), \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

$$\left|\frac{a+ib}{c+id}\right|^2 = \frac{a-ib}{c+id} \frac{a+ib}{c-id} = \frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}$$

Důkaz: (rozšířením)

$$z = \frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd+i(bc-ad)}{c^2+d^2} \quad (76)$$

$$z^* = \frac{ac+bd-i(bc-ad)}{c^2+d^2} = \frac{(a-ib)(c+id)}{c^2+d^2} = \frac{a-ib}{c-id} \quad (77)$$

$$zz^* = \frac{(ac+bd)^2 + (bc-ad)^2}{(c^2+d^2)^2} \quad (78)$$

$$zz^* = \frac{a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd + a^2d^2}{(c^2+d^2)^2} \quad (79)$$

$$zz^* = \frac{a^2(c^2+d^2) + b^2(d^2+c^2)}{(d^2+c^2)^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2+d^2} \quad (80)$$

B Fyzik ve vlaku

[Zdroj: WWW]

B.1 Začínající teoretický fyzik bez fantazie

Začínající teoretický fyzik bez fantazie nasedl do vlaku, vytáhl z kufříku hromádku papírů s výpočty a začal řešit pohyb vlaku ve zobecněných hyperbolických souřadnicích pomocí Hamilton-Jacobiho rovnice. Protože mu to chvíli potrvá, podívejme se zatím, jak se s obdobnou situací vyrovnávají někteří jeho zkušenější kolegové, vrátíme se k němu, až něco spočítá.

První z nich je

B.2 Experimentální fyzik

Experimentální fyzik nasedl do vlaku a pozoroval velmi zajímavý fenomén. Čas od času se ozvalo zahoukání a následně okolní krajina zmizela ve tmě, po chvíli se vše vrátilo do normálu. Podrobným rozbořením pozorovaného jevu se mu podařilo prokázat, že zahoukání vydává lokomotiva, a že tma je způsobena vjezdem vlaku do tunelu. Koeficient korelace mezi těmito jevy mu vyšel 0,999998, přičemž časová následnost jevů je vždy taková, jak bylo popsáno výše, a nezávisí na tom, po které trati ani kterým směrem se vlak pohybuje. Experimentální fyzik ví, že princip kauzality nedovoluje, aby následek předcházel svou příčinu, a proto formuluje nově objevený (empirický) zákon takto:

Zahoukání lokomotivy způsobuje, že vlak následně vjede do tunelu.

O tři roky později za to dostane Nobelovu cenu.

Jistě vás zajímá, kam se mezitím dostal náš začínající teoretický fyzik bez fantazie. Nechceme se zde příliš podrobně zabývat jeho výpočty a proto se omezme na konstatování, že už se dostal dvě stanice za tu, ve které chtěl původně vystoupit.

B.3 Kvantový fyzik

Kvantový fyzik vlakem zásadně nejezdí. Je mu totiž jasné, že operátory polohy a hybnosti spolu nekomutují, a proto může buď vědět, kde je, ale nevědět kam jede, nebo naopak vědět, kam jede, ale nevědět, kde je. Existuje sice celkem rozumný kompromis, kdy člověk přibližně ví, kde je, a zároveň přibližně ví, kam jede, ani to však kvantový fyzik nepovažuje za příliš šťastný způsob cestování.

Kdo naopak vlakem jezdí šíleně rád, je

B.4 Relativistický fyzik

Relativistický fyzik totiž díky tomu stárne pomaleji, než ti, kdož vlakem nejezdí. Nejraději samozřejmě jezdí Einsteinovým expresem. A úplně nejraději jezdí vlakem, když má dvojče, které může nechat stát na nástupišti (když se ho zeptáte, není-li jeho chování vůči dvojčeti poněkud kruté, obvykle se zatváří záhadně a odpoví vám, že je to relativní). Je tedy třeba, aby jeho dvojče nebyl také relativistický fyzik, protože ten by se těžko nechal přemluvit, aby zůstal stát na nástupišti, zatímco jeho bratr cestuje po světě, a jel by vlakem taky. Ideálním dvojčetem je proto pro relativistického fyzika kvantový fyzik, který, jak známo, vlakem nejezdí.

Bystrého čtenáře v tuto chvíli již určitě napadla otázka, jaký vztah k vlaku má potom relativistický kvantový fyzik. Na tuto otázku autor bohužel nezná odpověď, protože tak daleko se zatím ve studiu fyziky nedostal.

Vraťme se proto raději za

B.5 Začínajícím teoretickým fyzikem bez fantazie

Začínajícímu teoretickému fyzikovi bez fantazie se právě podařilo provést separaci času.

Abychom se vyhnuli obviněním z diskriminace, podívejme se opět za nějakým

B.6 Jiným experimentálním fyzikem

Jiný experimentální fyzik není tak úspěšný jako jeho kolega. Změřil totiž, že úhel mezi kolejemi je $(1, 3 \pm 8, 8) \cdot 10^{-5}$ SJ (čti: správných jednotek) a teorii o kolejích protínajících se v nekonečnu se mu tak nepodařilo ani ověřit ani vyvrátit.

Kvantový fyzik má také kolegu. Je jím

B.7 Jiný kvantový fyzik

Jiný kvantový fyzik je nejméně stejně zapřísáhlý odpůrce železnice jako jeho kolega. Dokázal, že jízdní řád je nesmysl, protože kam a kdy vlak jede, je určeno teprve tím, že do něj nasedneme, a navíc, že kdybychom se snažili zároveň sledovat stav všech vlaků, způsobilo by to stávkou na železnici (resp. vlaky by prostě přestaly jezdit).

Už jsme se dlouho nepodívali za

B.8 Začínajícím teoretickým fyzikem bez fantazie

Začínající teoretický fyzik bez fantazie dojel do koncové stanice vlaku a je z něj vyhazován nádražním zřízencem.

B.9 Statistický fyzik

Statistický fyzik vlakem jezdí, ale pouze v azbestovém obleku. Spočítal totiž, že předpokládá-li platnost ekvipartičního teorému a uváží přitom, že vlak je vázán na jakousi jedno-rozměrnou varietu (koleje) a má tedy pouze jeden stupeň volnosti, dostane teplotu dopravního systému asi $4 \cdot 10^{28}$ K. Také spočítal rozdělovací funkci odjezdů vlaku, která se liší od rozdělovací funkce vypočtené z jízdního řádu v tom, že vlaky jezdí asi o 5 minut až 4 hodiny později. Protože tento jev byl v praxi skutečně pozorován, je i on vážným kandidátem na Nobelovu cenu.

B.10 Začínající teoretický fyzik bez fantazie

Začínajícímu teoretickému fyzikovi bez fantazie se v nádražním vestibulu právě podařilo separovat proměnnou ξ .

B.11 Astrofyzik

Astrofyzik jezdí vlakem pravidelně, pouze ovšem jednu zastávku. Skoro celou cestu přitom vidí z okna pouze travnatý násep, keře šípků a občas nějakou tu břízu či akát. Toto pozorování ho vede k závěru, že téměř veškerá pozorovatelná hmota Vesmíru je tvořena travnatým náspem, keři šípků a občas nějakou tou břízou či akátem. Extrapolací postupného zarůstání náspu šípkem, břízami a akátem do minulosti pak získává stáří Vesmíru jako zhruba 15–20 let, předpokládá-li, že v raných stádiích byl Vesmír tvořen pouze náspem; šípek, bříza a akát vznikly až během jeho vývoje. Zbývá mu ještě vysvětlit vznik některých složitějších struktur, jako třeba nádraží, nicméně i na to už má několik nadějných teorií.

B.12 Učitel fyziky

Onehdy také jel vlakem. Počítal přitom, za jak dlouho se srazí rychlík, ve kterém sedí, s protijedoucím nákladním vlakem. Potom vytáhl z aktovky milimetrový papír a pokusil se též o grafické řešení, z kterého mu ovšem jednoznačně plyne, že se vlaky srazí ve chvíli, kdy popíše osu t .

B.13 Začínající teoretický fyzik bez fantazie

Začínající teoretický fyzik bez fantazie se už bohužel nikdy nestane zkušeným teoretickým fyzikem, protože zjistil, že na 14. straně svých výpočtů udělal chybu, a skočil pod mezinárodní expres Chopin projíždějící Břeclaví 23:28 CET. Budiž mu země lehká.

Jeho osud je doufejme natolik poučný, aby se nikdo nepokoušel následovat jeho příkladu a použil raději zobecněné parabolické souřadnice.

Reference

- [1] Eric W. Weisstein. Delta Function. *WWW*, 2019. <http://mathworld.wolfram.com/DeltaFunction.html>.