1 Písemka nanečisto, prosinec 2020, Kvantová Mechanika, Jiří Kvita, SLO, UP

Poznámka: Jde o 4 větší příklady (u zkoušky budou takovéto 2, a jeden menší), celkový počet bodů bude okolo 10, k ústní části bude potřeba alespoň polovina.

1.1 Příklad – Časový vývoj v jámě, 4b

Určete časový vývoj stavu (tj. zapište vlnovou funkci v obecném čase) v nekonečně hluboké potenciálové jámě $x \in (0, a)$, jenž je v čase $t = 0$ určen funkcí

$$\psi(x, t = 0) := A\ [\,\mathrm{i}\sin(3\pi x/a) + \sin(\pi x/a)\cos(\pi x/a)\,]$$

Nejprve nalezněte konstantu A, tak, aby šlo o normalizovaný stav. Spočtěte dále hustotu pravděpodobnosti v tomto stavu pro $t > 0$ a diskutujte případnou časovou závislost. Naznačte, jak byste spočetli střední hodnotu souřadnice v této superpozici, a diskutujte, zda závisí na čase.
Jaké jsou možné výsledky měření energie, a s jakými pravděpodobnostmi je nalezneme? Pomněte, že n-tý stacionární stav částice v nekonečně hluboké jámě šířky a je dán normalizovanou vlnovou funkcí

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\,\sin\frac{n\pi x}{a}\,,$$

k níž příslušná energie je $E_n = E_0\, n^2$, kde $E_0 \equiv \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$.

1.2 Příklad – Harmonické superpozice, 4b

Nalezněte střední hodnoty energie, souřadnice a hybnosti, a to jako funkci času, pro superpozici vlastních stavů energie harmonického oscilátoru, která je v čase $t = 0$ dána

$$|\psi(t = 0)\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|n\rangle + |n + 1\rangle\right)\,.$$

Pokud bude potřeba, s výhodou využijte vyjádření

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(\hat{a}_+ + \hat{a}_-)\,,\quad \text{a}\quad \hat{p} = \mathrm{i}\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\,(\hat{a}_+ - \hat{a}_-)$$

a vyhledejte si výsledky působení operátorů $\hat{a}_\pm$ na obecný stav $|n\rangle$ včetně normalizace. Nakonec, s využitím poznámek zapište tvar odpovídající vlnové funkce v x-reprezentaci obecně pro $t > 0$.

1.3 Larmorova porucha, 3b

. . . aneb Srovnejte si příště v labu pole.
Uvažujme hamiltonián odpovídajíci potenciální energii částice se spinem 1/2 v homogenním magnetickém poli orientovaném podél osy z

$$H_0 \equiv -\gamma B S_z$$

s vlastními stavy $\chi_\pm^{(0)}$ a jim odpovídající energie $E_\pm^{(0)} = \mp\gamma B\hbar/2$. Uvažujme nyní dodatečnou poruchu danou přítomností slabého magnetického pole ve směru osy x

$$H_I \equiv -\varepsilon\,\gamma B S_x\,,\quad |\varepsilon| \ll 1\,.$$

Ukažte, že první oprava k energii vlastních stavů $\chi_\pm$ neporušeného hamiltoniánu je v rámci stacionární poruchové teorie nulová. Dále spočtěte první korekci $\chi_\pm^{(1)}$ k neporušeným spinorům $\chi_\pm^{(0)}$ a druhou korekci k jejich energiím $E_\pm^{(2)}$. Zapište celkovou opravenou energii resp. opravený stav do Vámi nalezeného prvního resp. druhého řádu poruchové teorie.

Pracujte s výhodou buď v maticové reprezentaci v bázi vlastních vektorů operátoru S_3 nebo si vyjádřete operátor S_x z definic posunovacích operátorů

$$S_\pm = S_x \pm \mathrm{i} S_y$$

a využijte toho, že

$$S_\pm |s, m\rangle = \mathcal{A}_{s,m}^\pm |s, m \pm 1\rangle \,, \quad \mathcal{A}_{s,m}^\pm = \hbar \sqrt{(s \mp m)(s \pm m + 1)} \,.$$

1.4 Vodíková superpozice, 2b

Zapište v braketech, jak v čase $t > 0$ vypadá stav atomu vodíku, který je v čase $t = 0$ dán superpozicí základního stavu a 25% příměsí stavu s hodnotami kvantových čísel $n = 2$, $l = 1$, $m = -1$. Nejprve normalizujte stav s uvážením normalizovaných $|\psi_{nlm}\rangle$ a využijte zápisu energie n-tého stavu $E_n = E_1/n^2$. Jaké jsou možné výsledky měření energie v této superpozici? Spočtěte, zda a případně jak v tomto stavu závisí na čase střední hodnota $\hat{L}^2$.