Seznam domácích úkolů

- Dokažte, že platí $[\hat{A}, [\hat{B}, \hat{C}]] + [\hat{B}, [\hat{C}, \hat{A}]] + [\hat{C}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0$ (Jacobiho identita).
- Pomocí příkladů z hodiny $[\hat{x}, \hat{p}^n]$ a $[\hat{x}^n, \hat{p}]$ odvoďte komutátory $[\hat{x}, F(\hat{p})]$ a $[G(\hat{x}), \hat{p}]$.

1.6 Cvičení 7

Příklady k procvičení

- Určete normalizační konstantu A Gaussovského balíku a dále časový vývoj tohoto stavu $\psi(x,t)$ a hustotu pravděpodobnosti $\rho(x,t)$ je-li v čase $t=0$ dán funkcí

$$\psi(x, t=0) = Ae^{-ax^2};\ a \in \mathbb{R}, a > 0. \tag{1.20}$$

Časový vývoj určete pomocí rozkladu vlnové funkce $\psi(x,t)$ do vlastních stavů operátoru hybnosti

$$\psi_p(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\mathrm{i}\frac{px}{\hbar}} \tag{1.21}$$

jako

$$\psi(x,t) = \int_{\mathbb{R}} g(p)\psi_p(x,t)\,\mathrm{d}p\,. \tag{1.22}$$

- Griffiths Prob. 1.15 str. 22. – nezachovávání hustoty pravděpodobnosti pro komplexní potenciál, model nestabilní částice.

1.7 Cvičení 8

- Vlnové funkce lineárního harmonického oscilátoru jsou dány

$$\psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n(\xi) \mathrm{e}^{-\xi^2/2}\,, \quad \xi \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, x$$

a díky relaci ortogonality pro Hermitovy polynomy

$$\int_{\mathbb{R}} H_n(\xi) H_m(\xi) \mathrm{e}^{-\xi^2} \mathrm{d}\xi = \sqrt{\pi}\, 2^n n!\, \delta_{nm}$$

splňují

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_n^*(x)\psi_m(x)\mathrm{d}x = \delta_{nm}\,.$$

- Pro koeficienty jejich rozvoje do polynomů ξ^j platí rekurzivní vztah

$$a_{j+2} = \frac{-2(n-j)}{(j+2)(j+1)} a_j\,.$$

Odvoďte pomocí něj první 3 Hermitovy polynomy. (? :-)

- Hermitovy polynomy splňují

H_1, H_2, H_3 $\Leftarrow$

$$H_n(\xi) = (-1)^n \mathrm{e}^{\xi^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\xi^n} \mathrm{e}^{-\xi^2} \tag{1.23}$$

$$H_{n+1}(\xi) = 2\xi\, H_n(\xi) - 2n\, H_{n-1}(\xi) \tag{1.24}$$

H_4, H_5 $\Leftarrow$

- Spočítejte podle výše uvedených vtahů Hermitovy polynomy $H_3(\xi)$, $H_4(\xi)$ a $H_5(\xi)$
- Platí dále

H_2

$$H_n(\xi) = \left(2\xi - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\right)^n \cdot 1 \tag{1.25}$$

check H_3

$$H_n'(\xi) = 2n\, H_{n-1}(\xi) \tag{1.26}$$

$$H_{n+1}(\xi) = 2\xi\, H_n(\xi) - H_n'(\xi) \tag{1.27}$$

get H_6

$$H_n(\xi) = 2^n\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}D_\xi^2}\, \xi^n\,, \quad D_\xi \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} \tag{1.28}$$

- Výsledky, ke kterým byste se měli dobrat:

$$H_0(\xi) = 1 \tag{1.29}$$
$$H_1(\xi) = 2\xi \tag{1.30}$$
$$H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2 \tag{1.31}$$
$$H_3(\xi) = 8\xi^3 - 12\xi \tag{1.32}$$
$$H_4(\xi) = 16\xi^4 - 48\xi^2 + 12 \tag{1.33}$$
$$H_5(\xi) = 32\xi^5 - 160\xi^3 + 120\xi \tag{1.34}$$
$$H_6(\xi) = 64\xi^6 - 480\xi^4 + 720\xi^2 - 120 \tag{1.35}$$

1.8 Cvičení 9

Příklady k procvičení

- Ukažte, že projekční operátor $\hat{P}_\varphi \equiv |\varphi\rangle\langle\varphi|$, kde $\langle\varphi|\varphi\rangle = 1$, je hermitovský ($\hat{P}_\varphi^\dagger = \hat{P}_\varphi$) a idempotentní ($\hat{p}_\varphi^2 = \hat{p}_\varphi$).
- Dokažte, že libovolné dva operátory $\hat{A}$ a $\hat{B}$, které spolu komutují $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$, mají společné vlastní vektory.
- Napište rozklad stavového vektoru $|\psi\rangle$ ve spočetné bázi $|\varphi_n\rangle$ z definice

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |\varphi_n\rangle \tag{1.36}$$

  - Odvoďte z rozkladu výpočet koeficientů rozkladu $c_n = \langle\varphi_n|\psi\rangle$.
  - Odvoďte rozkladovou formuli vložením relace úplnosti

$$\hat{\mathbb{1}} = \sum_{n=0}^{\infty} |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n| \tag{1.37}$$

  a s pomocí definičního vztahu pro rozkladové koeficienty $c_n = \langle\varphi_n|\psi\rangle$.

- Stejně jako v minulém příkladě proveďte rozklad vektoru $\langle\psi|$ do spojité báze $|p\rangle$, $p \in \mathbb{R}$.
- Normalizujte stav

$$|\psi\rangle = \alpha|\varphi_1\rangle + \beta|\varphi_2\rangle, \tag{1.38}$$

  kde $\langle\varphi_m|\varphi_n\rangle = \delta_{mn}$.