KM 1 21. 12. 2020

Vodíková superpozice

$|\psi\rangle \dots$ lin. komb. $|\psi_1\rangle$ a $|\psi_2\rangle$

např. tak, že $|c_1|^2 = 3/4$

$|c_2|^2 = 1/4$

Volba fáze lib.:

třeba: $|\psi\rangle = A\left[\sqrt{3/4}\,|\psi_1\rangle + \cancel{e^{i\delta}}\sqrt{1/4}\,|\psi_2\rangle\right]$

chci: $\langle\psi|\psi\rangle = 1$; dle $\langle\psi_i|\psi_j\rangle = \delta_{ij} \Rightarrow$

$\langle\psi|\psi\rangle = |A|^2\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right) = |A|^2 = 1$

$\Rightarrow |A| = 1$:-) berme reálnou:

tj. $\boxed{|\psi(t=0)\rangle := \frac{1}{2}\left[\sqrt{3}\,|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle\right]}$

Nav, přesněji: $|\psi_1\rangle \equiv |\psi_{100}\rangle$ … zákl. stav
(dle zadání)

$|\psi_2\rangle \equiv |\psi_{21-1}\rangle$

(značení ψ_{nlm})

Časový vývoj ψ_{nlm} … E_n

$$\boxed{|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2}\left[\sqrt{3}\,|\psi_1\rangle e^{-i\frac{E_1 t}{\hbar}} + |\psi_2\rangle e^{-i\frac{E_2 t}{\hbar}}\right]}$$

$E_1/\hbar \equiv \omega_1$ (BTW záporná :-)

VS 1

$$\langle H \rangle_{\Psi(t)} \equiv \langle \Psi(t) | \hat{H} | \Psi(t) \rangle \qquad (*)$$

kde můžeme zapsat

$$|\Psi(t)\rangle = \underline{\underline{c_1 e^{-i\omega_1 t} |\Psi_{100}\rangle + c_2 e^{-i\omega_2 t} |\Psi_{21-1}\rangle}}$$

$$\boxed{c_1 = \sqrt{3/4}\,, \quad c_2 = 1/2}$$

$$\langle \Psi(t)| = \underline{\underline{c_1^* e^{i\omega_1 t} \langle \Psi_{100}| + c_2^* e^{i\omega_2 t} \langle \Psi_{21-1}|}}$$

Nejprve kontrola normy: díky kolmosti: $\langle \Psi_{100} | \Psi_{21-1} \rangle = 0$

$$\langle \Psi(t) | \Psi(t) \rangle = \underline{[\ldots]}\,\underline{[\ldots]} = \ldots =$$

$$= |c_1|^2 + |c_2|^2 = 3/4 + 1/4 = 1 \qquad :-)$$

Nyní stř. hodnota energie: s využitím:

$$\hat{H} |\Psi_{nlm}\rangle = E_n |\Psi_{nlm}\rangle \quad \text{a ortogonality:}$$

$$(*) = \underline{[\ldots]}\,\hat{H}\,\underline{[\ldots]} = \underline{[\ldots]}\Big[c_1 E_1 e^{-i\omega_1 t} |\Psi_{100}\rangle + c_2 E_2 e^{-i\omega_2 t} |\Psi_{21-1}\rangle\Big]$$

$$\boxed{\langle H \rangle_{\Psi(t)} = E_1 |c_1|^2 + E_2 |c_2|^2} \quad \ldots \text{čas. nezávislá! :-)}$$

$$\boxed{= \frac{3}{4} E_1 + \frac{1}{4} E_2}$$

kde $\quad E_n = -\frac{1}{2} \alpha^2 \frac{m_e c^2}{n^2} \qquad \alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c} \sim \frac{1}{137}$

(energie e^- v atomu vodíku ; $n = 1, 2, \ldots$)

VS2

Odp.: $\langle L^2 \rangle_{\psi(t)} = \langle \psi(t) | \hat{L}^2 | \psi(t) \rangle$

a dle $\hat{L}^2 | \psi_{nlm} \rangle = \hbar^2 l(l+1) | \psi_{nlm} \rangle$

$\langle L^2 \rangle_{\psi(t)} = |c_2|^2 \hbar^2 l(l+1) \Big|_{l=1} =$ ... ze stavu ψ_{21-1}

stav ψ_{100} má $l=0$
a nepřispěje

$= \frac{\hbar^2}{4} 1 \cdot 2 = \frac{\hbar^2}{2}$

Superpozice v jámě

$$\Psi(x,t=0) \equiv A\left[i\sin\frac{3\pi x}{a} + \sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi x}{a}\right] =$$

$$= A\left[i\sin\frac{3\pi x}{a} + \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{a}\right]\cdot\left(\frac{2}{a}\frac{a}{2}\right)^{1/2}$$

dle toho, že $\boxed{\psi_n(x) = \left(\frac{2}{a}\right)^{1/2}\sin\frac{n\pi x}{a}}$ (*) ... stac. stavy v jámě

$$\Psi(x,0) = \underbrace{\left(\frac{a}{2}\right)^{1/2}A}_{\substack{\parallel \\ \tilde{A}}}\left[i\cdot\underbrace{\left(\frac{2}{a}\right)^{1/2}\sin\frac{3\pi x}{a}} + \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{2}{a}\right)^{1/2}\sin\frac{2\pi x}{a}}\right] =$$

$$= \tilde{A}\left[i\cdot\psi_3(x) + \frac{1}{2}\psi_2(x)\right]$$

V ketech lze zapsat jako

$$|\Psi(0)\rangle = \tilde{A}\left[i\,|\psi_3\rangle + \frac{1}{2}|\psi_2\rangle\right]$$

dle vlastnosti normalizace $\langle\psi_j|\psi_k\rangle = \delta_{jk}$

$\langle\Psi(0)|\Psi(0)\rangle \equiv 1$ chceme :-) $\Rightarrow$ podm. na $\tilde{A}$

$$\langle\Psi(0)| = \tilde{A}^*\left[-i\,\langle\psi_3| + \frac{1}{2}\langle\psi_2|\right]$$

$$\langle\Psi(0)|\Psi(0)\rangle = |\tilde{A}|^2\left(1+\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{4}|\tilde{A}|^2 \equiv 1$$

$\Rightarrow |\tilde{A}| = \sqrt{\frac{4}{5}}$ volba: $\tilde{A} = \frac{2}{\sqrt{5}}\cancel{e^{i\delta}}$ real

$$\Rightarrow |\Psi(0)\rangle = \frac{2}{\sqrt{5}}\left[i\,|\psi_3\rangle + \frac{1}{2}|\psi_2\rangle\right]$$

$$\Psi(x,0) = \frac{2}{\sqrt{5}}\left[i\,\psi_3(x) + \frac{1}{2}\psi_2(x)\right] = \left|\begin{matrix}\text{dle}\\ (*)\end{matrix}\right| =$$

$$= i\left(\frac{2^3}{5a}\right)^{1/2}\sin\frac{3\pi x}{a} + \left(\frac{2}{5a}\right)^{1/2}\sin\frac{2\pi x}{a}$$

$$\psi(x,t) = \left(\frac{2}{5a}\right)^{1/2}\left[2i \sin\frac{3\pi x}{a}\, e^{-i\boxed{\frac{E_3}{\hbar}}t} + \sin\frac{2\pi x}{a}\, e^{-i\boxed{\frac{E_2}{\hbar}}t}\right]$$

def $\boxed{\omega_n} \equiv E_n/\hbar$ kde již (jsme) $E_n = \dfrac{(n\pi\hbar)^2}{2ma^2}$

$$\psi^*(x,t) = \left(\frac{2}{5a}\right)^{1/2}\left[-2i \sin\frac{3\pi x}{a}\, e^{+i\boxed{\omega_3}t} + \sin\frac{2\pi x}{a}\, e^{+i\boxed{\omega_2}t}\right]$$

$$\rho(x,t) = \frac{2}{5a}\Bigg[4\sin^2\frac{3\pi x}{a} + \underbrace{2i \sin\frac{3\pi x}{a}\sin\frac{2\pi x}{a}\, e^{i\overbrace{(\omega_2-\omega_3)}^{\omega_{23}}t}}_{z}$$

$$+ \sin^2\frac{2\pi x}{a} \underbrace{- 2i \sin\frac{3\pi x}{a}\sin\frac{2\pi x}{a}\, e^{-i\overbrace{(\omega_2-\omega_3)}^{\omega_{23}}t}}_{z^*}\Bigg] =$$

$$\left(\overset{\text{dle}}{\equiv} \psi^*(x,t)\,\psi(x,t) \quad :-)\right)$$

$$= \left| \begin{array}{l} z + z^* = 2\,\mathrm{Re}\, z \\ \sin x = -\sin x \end{array} \right| =$$

$\sim|\psi_3|^2$ $\quad\sim|\psi_2|^2$ $\quad$ časový člen, interferenční

$$= \frac{2}{5a}\left[4\sin^2\frac{3\pi x}{a} + \sin^2\frac{2\pi x}{a} + \boxed{4\sin\frac{3\pi x}{a}\sin\frac{2\pi x}{a}\sin\omega_{32}t}\right]$$

$$\text{kde}\quad \omega_{32} = \omega_3 - \omega_2 = \frac{E_3 - E_2}{\hbar} =$$

$$= \frac{\pi^2\hbar}{2ma^2}\left(3^2 - 2^2\right) = \frac{5\pi^2\hbar}{2ma^2}$$

pozn.: $\quad$ obec. $\omega_{nm} = \dfrac{\pi^2\hbar}{2ma^2}\left(n^2 - m^2\right) = -\omega_{mn}$

$$\mathrm{Re}\left(2i\, e^{i\delta}\right) = \mathrm{Re}\left[2i\left(\cos\delta + i\sin\delta\right)\right] =$$

$$= -2\sin\delta = 2\sin(-\delta)$$

je vidět, že

$\rho(x,t) \in \mathbb{R}$:-)

$$\langle x \rangle_{\Psi(t)} = \int_0^a \psi^*(x,t)\, x\, \psi(x,t)\, dx =$$

$$= \int_0^a \rho(x,t)\, x\, dx$$

a je potřeba spočítat integrály typu

$$\frac{2}{a}\int_0^a x \sin^2 \frac{n\pi x}{a}\, dx = \frac{a}{2}$$ (známé, stačí jedno :-)

a další $\frac{2}{a}\int_0^a x \sin\frac{n\pi x}{a} \sin\frac{m\pi x}{a}\, dx$
$m \neq n$

které u takto členu, bude-li $\neq 0$, bude stát člen $\sin \omega_{32} t$, tj.

$\langle x \rangle_{\Psi(t)}$ bude harmonická funkce času.

Možné výsledky měření energie na stavu $\Psi(x,t)$:
amplituda pravděp. "nalezení" stavu —||—
ve stavu ψ_n je dána průmětem:

$$c_n \equiv \langle \psi_n | \Psi(x,t) \rangle \equiv c_n(t)$$

P. naměření energie E_n je $|c_n|^2$

Zde: ψ ... lin. komb. ψ_2 a ψ_3; nenulové budou pouze c_2 a c_3.

SJ3

c_n je obecně $\sim e^{-i\frac{E_n t}{\hbar}}$, ale $|c_n|^2$ bude čas. nezávislé! ;-)

Zde: $$c_3 = \left|\frac{2}{\sqrt{5}}\, i\right|^2 = \frac{4}{5}$$

Jde (⊛)

$$c_2 = \left|\frac{1}{\sqrt{5}}\right|^2 = \frac{1}{5}$$

Kdo si musí faktor $\left(\frac{2}{a}\right)^{1/2}$ počítat „bokem" k $\sin\frac{3\pi x}{a}$, nebo takto „spolu" jde o normalizovaný stav, a zbytek jest c_3 :-)

Pozn.: normalizaci $\psi(x,0)$ by šlo řešit i bez braketů, pomocí integrálu

$$\langle \psi_n | \psi_m \rangle = \int_0^a \left(\frac{2}{a}\right)^{1/2} \sin\frac{n\pi x}{a} \left(\frac{2}{a}\right)^{1/2} \sin\frac{m\pi x}{a}\, dx$$

$$= \delta_{nm} \Rightarrow$$

$$\int_0^a \sin\frac{n\pi x}{a} \sin\frac{m\pi x}{a}\, dx = \frac{a}{2}\delta_{nm}$$