Řešené příklady z MMF

U každé kapitoly je vždy krátký návod se vzorci, které pomohou vyřešit dané příklady. Použité značení veličin se může odlišovat od toho, které bylo použito v přednáškách.

Příklady jsou převzaty z těchto zdrojů:

x.x.x Introduction to STATICS and DYNAMICS, Andy Ruina and Rudra Pratap, Oxford University Press (Preprint) Most recent modifications on February 7, 2013.

K.x/x Cvičení z fyziky (Mechanika), V. Kolesnikov, Olomouc 1994.

L.text.x/x Příklady zpracované doc. Mištou.

H.x/x Fyzika v príkladoch, V. Hajko, SVTL, Bratislava, SNTL Praha 1960.

R.x Převzatý příklad z webu.

Pokud nebude uvedeno jinak, předpokládejme gravitační zrychlení směřující dolů se zrychlením $g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

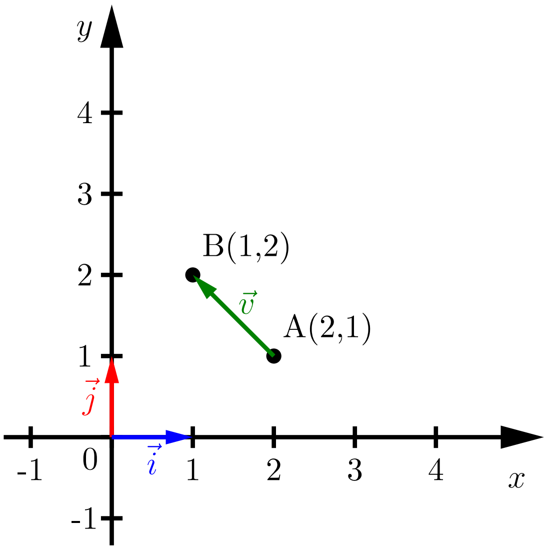
Nikdy nespoléhejte ve výsledek, dokud ho neověříte kontrolním výpočtem.

1 Vektory

skalár c neboli prachsprosté jednoduché číslo

vektor $\vec{v}$ je definován velikostí a směrem

tenzor $\overset{\leftrightarrow}{\sigma}$ je vícedimenzionální, může být popsán pomocí matic, tím se nebude zatěžovat



Zvolíme vhodně počátek souřadnic a zavedeme ortogonální souřadný systém. Potom můžeme vektor definovat pomocí:

- dvou bodů A a B v prostoru, jen se nesmí zapomenout na směr – vektor $\vec{v}$ směřuje z bodu A o souřadnicích $(2, 1)$ do bodu B na souřadnicích $(1, 2)$ $\vec{v} = [1 - 2, 2 - 1] = [-1, 1]$.
- jednotkových vektorů ve směrech os x ($\vec{i}$), y ($\vec{j}$) a z ($\vec{k}$), např. $\vec{v} = -1 \cdot \vec{i} + 1 \cdot \vec{j}$.

Operace s vektory

sčítání vektorů – lichoběžníkové pravidlo, jednoduše sečteme souřadnice, $\vec{v}_1 = [4, -2]$, $\vec{v}_2 = [-5, 3]$, $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = [4 - 5, -2 + 3] = [-1, 1]$

násobení skalárem – vynásobíme jednotlivé souřadnice, $3\vec{v} = [3 \cdot (-1), 3 \cdot 1] = [-3, 3]$

skalární součin – $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = |\vec{v}_1||\vec{v}_2| \cos \alpha$, kde $| \cdot |$ značí velikost vektoru (zpočítáme z Pythágorovy věty) a α je úhel mezi oběma vektory, výsledkem je skalár

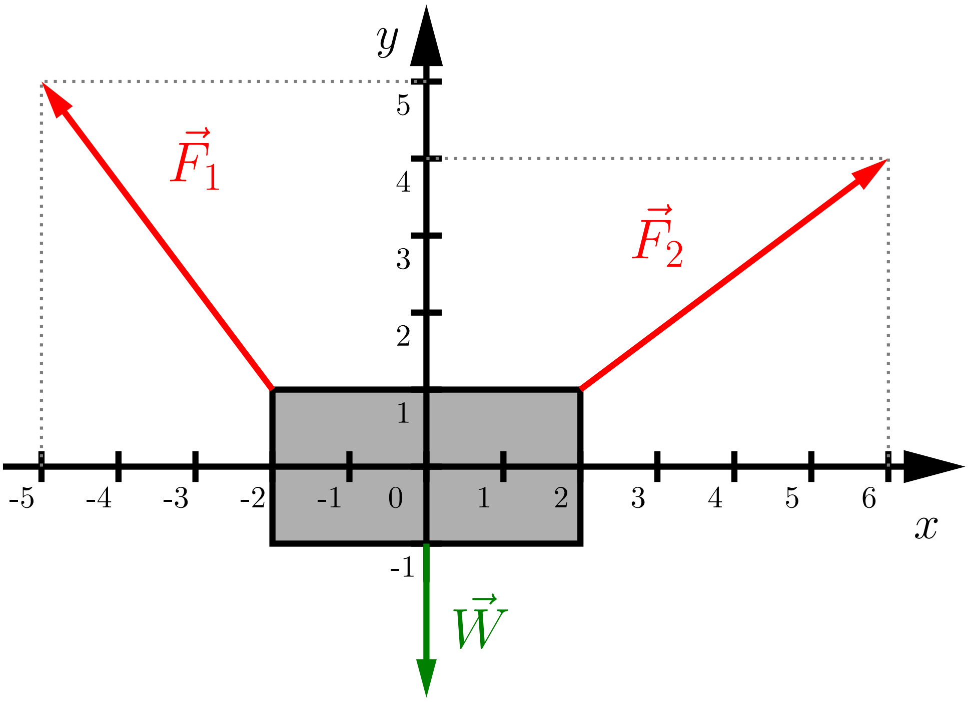
vektorový součin – $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \vec{n}|\vec{v}_1||\vec{v}_2| \sin \alpha$, kde $\vec{n}$ je jednotkový vektor kolmý na oba vektory (kolmý na rovinu, ve které oba vektory leží), výsledkem je vektor

Jednotkový vektor $\vec{w}$ ve směru vektoru $\vec{v}$ zpočítáme podle vztahu

$$\vec{w} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{[-1, 1]}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = \left[\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right].$$

1.1 Příklad 2.1.11

Na těleso o hmotnosti $m = 5\,\mathrm{kg}$ působí tři síly: $|\vec{F}_1| = 20\,\mathrm{N}$, $|\vec{F}_2| = 50\,\mathrm{N}$ a gravitační síla $|\vec{W}|$, viz obrázek. Určete velikost výsledné síly působící na těleso a směr vyjádřený pomocí jednotkového vektoru. Uvažujte, že $g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.



Výsledek

$$|\vec{F}| = 20\sqrt{2}\,\mathrm{N} \approx 28.28\,\mathrm{N}, \qquad \vec{f} = \left[\frac{7}{5\sqrt{2}}, -\frac{1}{5\sqrt{2}}\right].$$

1.2 Příklad 2.1.12

Nechť platí, že $\sum_i^4 \vec{F}_i = 0\,\mathrm{N}$, kde $\vec{F}_1 = \vec{i} \cdot 20\,\mathrm{N}$, $\vec{F}_2 = \vec{j} \cdot 50\,\mathrm{N}$, $\vec{F}_3 = (-\vec{i} + \vec{j})10\,\mathrm{N}$, kde $\vec{i}$, $\vec{j}$ a $\vec{k}$ jsou jednotkové vektory ve směru osy x, y a z. Najděte vektor $\vec{F}_4$.

Výsledek $\vec{F}_4 = [-10, -60, 0]\,\mathrm{N}$

1.3 Příklad 2.1.23

Najděte jednotkový vektor λ_{AB} směřující z bodu A(1,1,0) do bodu B(2,3,0).

Výsledek

$$\lambda_{\mathrm{AB}} = \left[\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right].$$

1.4 Příklad K.11/1

Dva hmotné body, A a B, se pohybují rychlostmi $\vec{v}_\mathrm{A} = \vec{i} \cdot 2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ a $\vec{v}_\mathrm{B} = \vec{j} \cdot 3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. V čase $t = 0\,\mathrm{s}$ mají polohy dané souřadnicemi A(-3,0) a B(0,-3). Souřadnice v závorkách jsou zadané v metrech. Určete vektor $\vec{r}$, který určuje polohu bodu B vzhledem k bodu A jako funkci času. Dále určete vzdálenost mezi body A a B v časech $t = 1\,\mathrm{s}$ a $t = 2\,\mathrm{s}$.

Výsledek $\vec{r} = [3 - 2t, -3 + 3t]$, $|\vec{r}(t = 1\,\mathrm{s})| = 1\,\mathrm{m}$, $|\vec{r}(t = 2\,\mathrm{s})| = \sqrt{10}\,\mathrm{m} \approx 3.16\,\mathrm{m}$

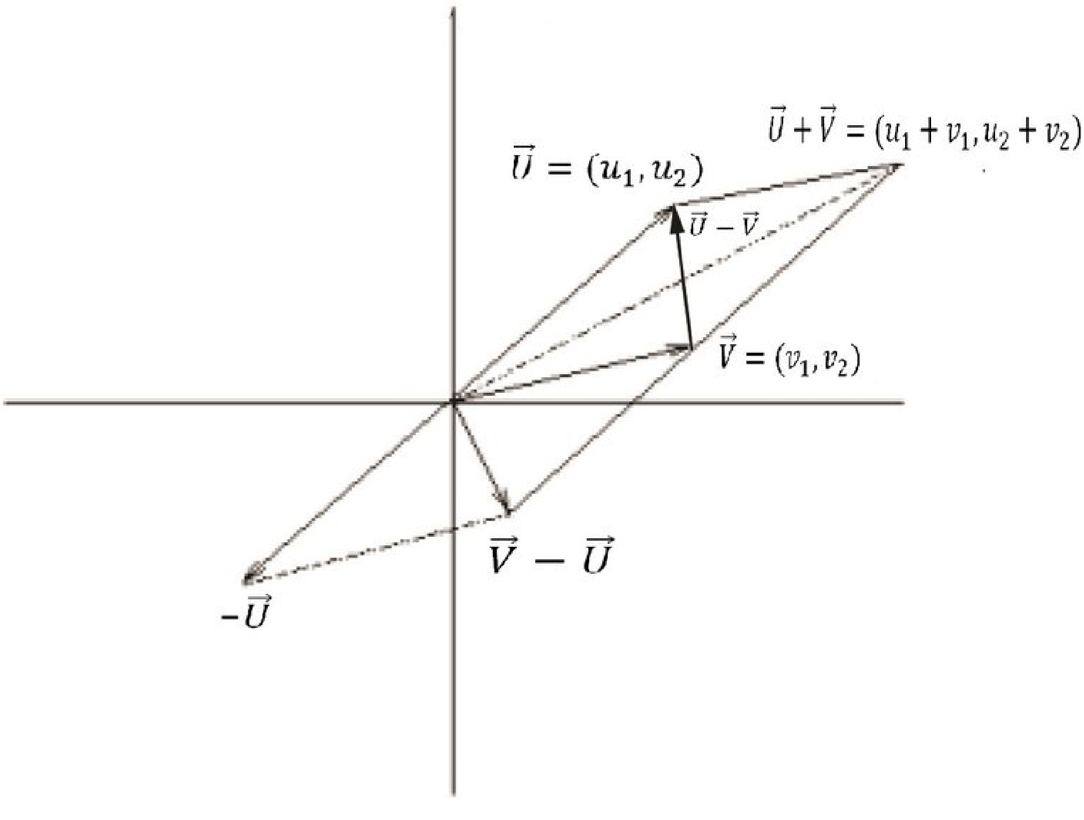
1.5 Příklad L.statika1./4

Na těleso o hmotnosti $m = 10\,\mathrm{kg}$ působí současně tři stejně velké síly $F_1 = F_2 = F_3 = 50\,\mathrm{N}$. Úhel mezi silami F_1 a F_2 je 90°, úhel mezi silami F_2 a F_3 je 90° a také úhel mezi silami F_3 a F_1 je 90°. Najděte směrový jednotkový vektor a velikost výsledné síly.

Výsledek

$$\frac{\vec{F}}{|\vec{F}|} = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right], \qquad |\vec{F}| = 50\sqrt{3}\,\mathrm{N} \approx 86.60\,\mathrm{N}$$

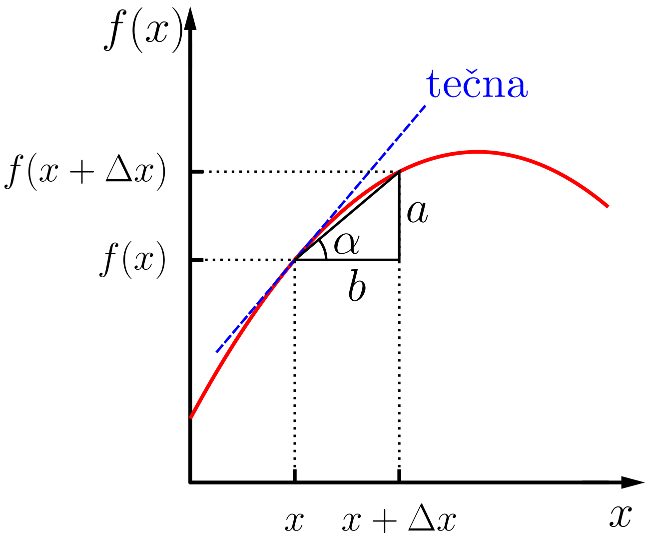
PS: V tomto příkladu nehraje hmotnost tělesa roli, řešitele má jen zmást :-).



Derivace

Derivace je matematický způsob popisu míry změny funkce na své proměnné. Prakticky se derivací zjistí směrnice tečny (sklon křivky) α funkce v daném bodě,

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{(x+\Delta x) - x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$



Derivace je definována jako limita pro $\Delta x \to 0$, tím určíme tečnu k funkci f přímo v bodě x,

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Používá se několik různých značení derivace, krom $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ se používá f'. Pro druhou derivaci $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$ (f''), obdobně derivace vyšších řádů. Pokud je funkce závislá na více proměnných, potom se používá parciální derivace jen podle jedné proměnné, přičemž druhá proměnná se chová jako konstanta, značení $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$. V případě funkce závislé na čase se může derivace značit pomocí teček, $\dot{f}(t)$, $\ddot{f}(t)$.

Pravidla pro derivace

f a g značí funkce, a a b konstanty

$$(af+bg)' = af'+bg', \qquad (fg)' = f'g+fg', \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}, \qquad (f(g))' = f'(g)\cdot g'$$

Základní derivační vzorečky

$$(konst.)' = 0, \qquad (ax)' = a, \qquad (x^m)' = m \cdot x^{m-1}, \qquad (x^{-1})' = -x^{-2},$$
$$(e^x)' = e^x, \qquad (\sin x)' = \cos x, \qquad (\cos x)' = -\sin x.$$

Určení průběhu funkce

Pomocí derivací lze určit některé parametry potřebné pro zjištění průbehu funkce v závislosti na její proměnné.

$f' > 0$ – α kladná, funkce je rostoucí

$f' < 0$ – α záporná, funkce je klesající

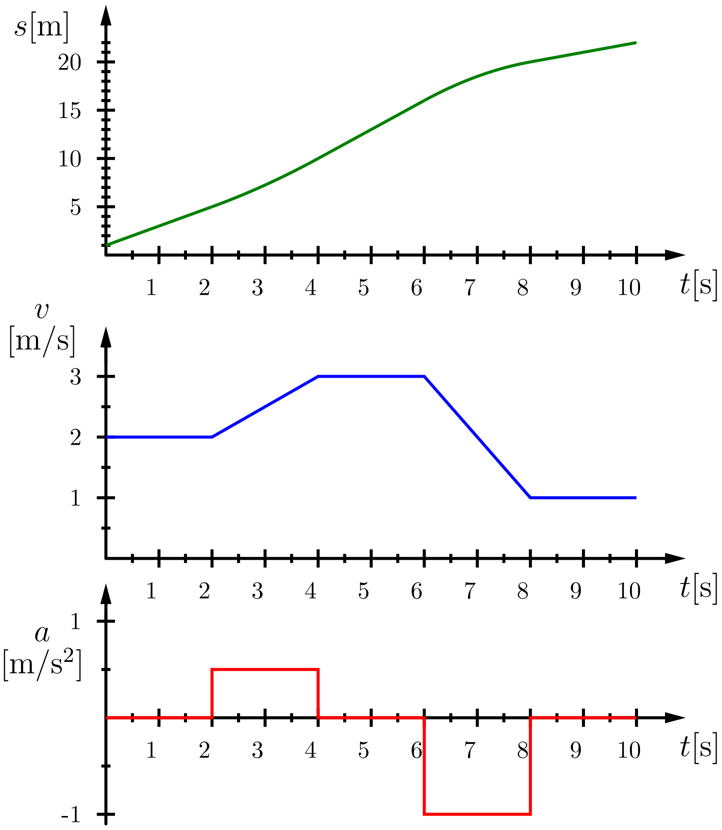
$f' = 0$ – $\alpha = 0$, lokální maximum nebo minimum (závisí na znaménku druhé derivace)

$f'' > 0$ – funkce konvexní

$f'' < 0$ – funkce konkávní

$f'' = 0$ – inflexní bod

2 Kinematika translačního pohybu



Translační pohyb je plně popsán závislostí změny dráhy na čase, $s(t)$. Rychlost lze určit jako změnu dráhy v čase, tedy ji můžeme zjistit jako derivaci dráhy podle času, $v(t) = \dot{s}(t)$. Zrychlení (zpomalení) je pro změnu změna rychlosti v čase, $a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{s}(t)$.

Další derivací by jsme dostali změnu zrychlení v čase, tedy ryv (anglicky *jerk* = cukat), což je veličina důležitá hlavně pro konstruktéry pouťových atrakcí. Nicméně i v dopravních prostředcích se řeší pohodovost jízdy. Například při navrhování bezpečnostních prvků automobilů se musí vzít v úvahu kritická hodnota ryvu, pro hodnoty větší jak 1 000 g/s dochází ke zraněním neslučitelných se životem.

Pohyb rovnoměrně zrychlený

Těleso se pohybuje rovnoměrně zrychleně, pokud jeho zrychlení a není závislé na čase, je konstantní. Těleso v čase $t = 0$ je na pozici s_0 a má počáteční rychlost v_0. Jeho pohyb lze popsat pomocí těchto rovnic:

dráha $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0$

rychlost $v(t) = at + v_0$

U přímočarého pohybu zavedeme znaménkovou konvenci, kdy zrychlení je kladné, pokud má stejný směr jako rychlost a záporné, pokud směřuje opačně a těleso zpomaluje.

2.1 Příklad K.13/3

Polohový vektor $\vec{r}$ má složky

$$x(t) = A\sin(5t), \qquad y(t) = B\cos(5t),$$

kde A a B jsou konstanty. Určete rovnici dráhy hmotného bodu.

Výsledek elipsa v rovině xy, $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$

2.2 Příklad K.13/4

Trajektorie hmotného bodu je dána parametrickými rovnicemi

$$x(t) = a\cos(\omega t), \qquad y(t) = a\sin(\omega t), \qquad z(t) = v_0 t,$$

kde a, ω a v_0 jsou konstanty. Určete trajektorii, velikost rychlosti hmotného bodu a velikost uražené dráhy s v závislosti na čase.

Výsledek průmět do roviny xy je kružnice o poloměru a, $(x^2 + y^2 = a^2)$, v prostoru se hmotný bod pohybuje po šroubovici obtočené okolo osy z rychlostí $|\vec{v}| = v = \sqrt{a^2\omega^2 + v_0^2}$, $s(t) = v \cdot t = \sqrt{a^2\omega^2 + v_0^2}\,t$

2.3 Příklad K.18/1

Hmotný bod se pohybuje přímočaře. Závislost dráhy na čase je dána vztahem

$$s(t) = 3t - 6t^2 + 4t^3,$$

která je udána v jednotkách metrů. Určete:

a) počáteční rychlost,

b) čas, ve kterém je rychlost rovna nule,

c) počáteční zrychlení,

d) čas, ve kterém je zrychlení rovno nule.

Výsledek a) $v(0) = 3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, b) $t = 0.5\,\mathrm{s}$, c) $a(0) = -12\,\mathrm{m/s^2}$, d) $t = 0.5\,\mathrm{s}$ PS: Hmotný bod od začátku pohybu zpomaluje, v čase $0.5\,\mathrm{s}$ hmotný bod zastaví, a pak zase začne zrychlovat. Pohybuje se stále v jednom (kladném) směru, pro žádný čas nenastane, aby rychlost byla záporná.

2.4 Příklad L.Kin1.5

Částice se pohybuje přímočaře po ose x podle vztahu $x(t) = At + Bt^2$, kde $A = 5\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$ a $B = 6\,\mathrm{cm/s^2}$. Určete okamžitou rychlost částice začátkem desáté a koncem dvanácté sekundy a průměrnou rychlost v intervalu mezi těmito okamžiky.

Výsledek Nejdřív si musíme ujasnit termín „začátkem x-té sekundy“. x-tá sekunda začíná po konci $x - 1$ sekundy, takže začátkem desáté sekundy je myšlen čas $t = 9\,\mathrm{s}$. $v(9\,\mathrm{s}) = 1.13\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $v(12\,\mathrm{s}) = 1.49\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $\overline{v} = 1.31\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

2.5 Příklad K.19/3

Pohyb hmotného bodu je dán rovnicemi

$$x(t) = t^3 - 6t + 1, \qquad y(t) = 4t^2 - 9t, \qquad z(t) = t^3 - 3t^2 + 6t$$

v jednotkách metrů. Určete velikost rychlosti a zrychlení hmotného bodu v čase $t = 2\,\mathrm{s}$.

Výsledek $v(2\,\mathrm{s}) = 11\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $a(2\,\mathrm{s}) = 16\,\mathrm{m/s^2}$.

2.6 Příklad K.19/5

Trajektorie hmotného bodu pohybujícího se v rovině xy je dána parametricky (v jednotkách metrů):

$$x(t) = t^3 - 9, \qquad y(t) = 4t^2 - 4t - 6.$$

Určete:

a) vzdálenost hmotného bodu od počátku souřadnic v čase $t = 1\,\mathrm{s}$,

b) velikost rychlosti a zrychlení v čase $t = 1\,\mathrm{s}$,

c) čas, ve kterém je rychlost rovnoběžná s osou x.

Výsledek a) $s(1\,\mathrm{s}) = 10\,\mathrm{m}$, b) $v(1\,\mathrm{s}) = 5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ a $a(1\,\mathrm{s}) = 10\,\mathrm{m/s^2}$, c) $t = 0.5\,\mathrm{s}$

2.7 Příklad K.19/6

Hmotný bod se pohybuje po šroubovici, která je popsána parametrickými rovnicemi

$$x(t) = A\sin(Bt), \qquad y(t) = A\cos(Bt), \qquad z(t) = Ct,$$

kde A, B a C jsou konstanty. Určete rychlost hmotného bodu.

Výsledek $v = \sqrt{A^2B^2 + C^2}$

2.8 Příklad K.20/8

Trajektorie hmotného bodu je dána vztahem $\vec{r} = \vec{r}_0(t^2 - A)$, kde $\vec{r}_0$ a A nejsou závislé na čase. Určete rychlost, zrychlení a rozhodněte, o jaký pohyb jde.

Výsledek $\vec{v}(t) = 2\vec{r}_0 t$, $\vec{a}(t) = 2\vec{r}_0$, pohyb rovnoměrně zrychlený ve směru vektoru $\vec{r}_0$

2.9 Příklad K.20/9

Těleso pohybující se přímočaře s konstantním zrychlením urazí vzdálenost $s = 180\,\mathrm{m}$ mezi body A a B za $6\,\mathrm{s}$. Jeho rychlost v okamžiku, kdy prochází bodem B, je $v = 45\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Jaké je jeho zrychlení? Jakou rychlost v_0 mělo, když procházelo bodem A?

Výsledek $a = 5\,\mathrm{m/s^2}$, $v_0 = 15\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

2.10 Příklad K.20/10

Strojvůdce rychlíku jedoucího rychlostí $30\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ spatří před sebou na téže koleji nákladní vlak, jehož poslední vůz je ve vzdálenosti $200\,\mathrm{m}$. Nákladní vlak jede konstantní rychlostí $10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ stejným směrem bez vědomí blížícího se nebezpečí. Strojvůdce rychlíku začne okamžitě brzdit, takže se rychlík nadále pohybuje se zpomalením $1\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Půjde strojvůdce za mříže za projetí návěstidla (vlaky se srazí) nebo se to podaří ututlat (ke srážce nedojde)? Jestliže ke srážce dojde, vypočtěte, na kterém místě a s jakou relativní rychlostí tak nastane.

Výsledek Místo srážky je vzdálené $400\,\mathrm{m}$ od místa začátku brzdění rychlíku. Jeho rychlost bude $v = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, tedy stejná jako rychlost nákladního vlaku. Dotknou se nárazníky, asi by to měla prošetřit Drážní inspekce.
PS: Řeší se kvadratická rovnice pro čas srážky, má jeden kořen. Pokud by rovnice neměla řešení, ke srážce by nedošlo. Pokud by měla kořeny dva, tak ten menší je čas srážky. Druhý kořen by odpovídal času, ve kterém by poslední vagon nákladního vlaku opět předjel lokomotivu rychlíku, pokud by jeli po dvou různých kolejích.

2.11 Příklad K.20/11

Z téhož místa vyjedou za sebou v časovém odstupu $\tau = 20\,\mathrm{s}$ dvě auta. Obě se pohybují rovnoměrně zrychleně. První auto má počáteční rychlost $v_1 = 25\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ a zrychlení $a_1 = 0.5\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Druhé auto má počáteční rychlost $v_2 = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ a zrychlení $a_2 = 2.5\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Za jakou dobu se obě auta potkají?

Výsledek Druhé auto předjede první $40\,\mathrm{s}$ po svém rozjezdu tedy $60\,\mathrm{s}$ po odjezdu prvního vozu.

2.12 Příklad L.Kin1/1

Určete průměrnou rychlost hmotného bodu, který se pohybuje:

a) první třetinu doby pohybu rychlostí $v_1 = 6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, další dvě třetiny rychlostí $v_2 = 1.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$,

b) první třetinu celkové dráhy rychlostí $v_1 = 6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, další dvě třetiny rychlostí $v_2 = 1.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$,

Výsledek a) $v = 3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, b) $v = 2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

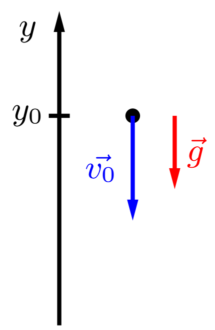
3 Pohyby v homogenním gravitačním poli

Gravitační síla popisuje přitahování těles s nenulovou hmotností. V této kapitole budeme řešit úlohy, kdy se těleso pohybuje v gravitačním poli planety Země. Pro zjednodušení předpokládáme, že gravitační síla je ve sledované oblasti neměnná, tj. má stejnou velikost i směr. Směr gravitační síly $\vec{F}_g = m\vec{g}$ směřuje do centra planety (prostě směrem dolů). Také předpokládáme, že se těleso pohybuje bez tření (odporu vzduchu).

Velikost gravitační zrychlení g se mění v závislosti na zeměpisné šířce. Největší je na pólech, jelikož je Země zploštělá, takže je menší vzdálenost ke středu, a nepůsobí tam odstředivá síla, $g_{\mathrm{pole}} = 9.832\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Nejmenší je naopak na rovníku, $g_{\mathrm{eq}} = 9.780\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Jako střední velikost gravitační konstanty se bere hodnota $9.806\,65\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, která se obvykle zaokrouhluje na hodnotu $9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, popřípadě na $10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, pokud si chceme výpočet zjednodušit

Pro zjednodušení popisu jednotlivých pohybů si zavedeme soustavu souřadnic, kdy osa x je rovnoběžná s povrchem země a osa y směřuje nahoru proti směru gravitačního pole.

Volný pád

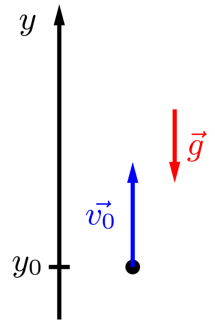


Volný pád je pohyb rovnoměrně zrychlený směrem dolů. V místě y_0 udělíme tělesu počáteční rychlost v_0 ve směru gravitačního zrychlení o konstantní velikosti g (proti směru osy y, proto záporná znaménka),

$$y(t) = y_0 - v_0 t - \frac{1}{2} g t^2, \qquad v_y(t) = -v_0 - gt.$$

Pokud je počáteční rychlost nulová, potom je čas dopadu z výšky h roven $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ (řeší se rovnice $0 = h - \frac{1}{2} g t^2$). Dosazením tohoto času do rovnice pro rychlost získáme velikost rychlosti dopadu $|v| = \sqrt{2gh}$. Tato rychlost není závislá na hmotnosti, takže teď znáte odpověď na chyták: „Co padá rychleji – kilo železa nebo kilo peří?“.

Vrh svislý vzhůru



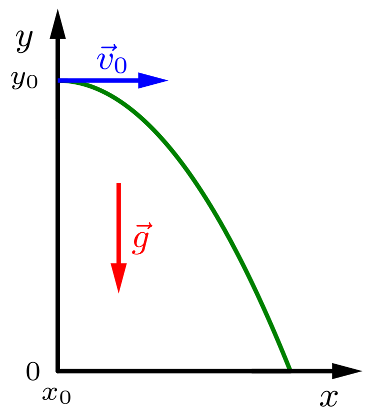
Tento pohyb je rozšířením předchozího, kdy předpokládáme, že počáteční rychlost má směr opačný než gravitační zrychlení, tedy ve směru osy y:

$$y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2, \qquad v_y(t) = v_0 - gt.$$

Maximální dosaženou výšku tělesa $h_{\max}$ získáme z předpokladu, že v tom místě má těleso nulovou rychlost, tedy $v_0 - gt = 0 \to t = \frac{v_0}{g}$, $h_{\max} = y_0 + v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_0^2}{g^2} = y_0 + \frac{v_0^2}{2g}$. Za dvojnásobný čas projde těleso opět počátečním bodem y_0 rychlostí v_0.

Vrh vodorovný

Při vrhu vodorovném směřuje počáteční rychlost ve směru osy x kolmo na gravitační zrychlení. Pohyb už musíme dělit do dvou os, v ose x se těleso pohybuje bez zrychlení, v ose y se jedná o volný pád,



$$x(t) = x_0 + v_0 t, \qquad v_x = v_0,$$
$$y(t) = y_0 - \tfrac{1}{2} g t^2, \qquad v_y = -gt.$$

Čas dopadu tělesa je stejný jako u volného pádu, tedy z výšky h dopadne v čase $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$. Místo dopadu v ose x lze spočítáme podle vztahu $x(t) = x_0 + v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}$. Rychlost v okamžiku dopadu má dvě složky, pokud chceme znát velikost rychlosti, musíme opět použít Pythágorovu větu,

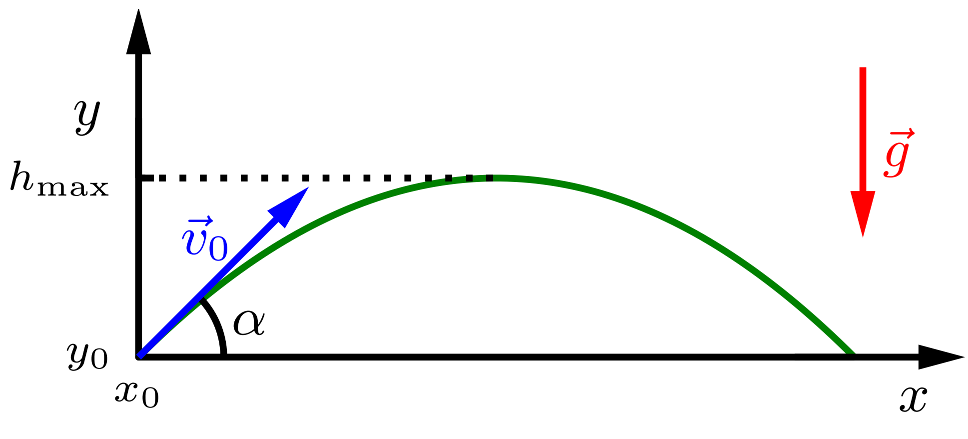
$$|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2} = \sqrt{v_0^2 + 2gh}.$$

Vrh šikmý

Vrh šikmý je nejobecnějším pohybem v homogenním gravitačním poli. Těleso je vrženo počáteční rychlostí v_0 pod úhlem α vzhledem k ose x. Ve směru osy x se těleso pohybuje bez zrychlení rychlostí $v_0 \cos\alpha$, ve směru osy y se jedná o pohyb svislý vzhůru s počáteční rychlostí $v_0 \sin\alpha$. Pro specifické úhly α získáme všechny předchozí pohyby: pro $\alpha = -90°$ volný pád, pro $\alpha = 90°$ vrh svislý vzhůru a pro $\alpha = 0°$ vrh vodorovný. Vrh šikmý lze popsat pomocí rovnic:

$$x(t) = x_0 + v_0 \cos\alpha\, t, \qquad v_x = v_0 \cos\alpha,$$
$$y(t) = y_0 + v_0 \sin\alpha\, t - \tfrac{1}{2} g t^2, \qquad v_y = v_0 \sin\alpha - gt.$$

Stejně jako u vrhu svislého vzhůru určíme čas dosažení maximální výšky z podmínky, že $v_y = 0 \rightarrow t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$, této výšky $h_{\max} = y_0 + \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$ bude dosaženo ve vzdálenosti $x(t) = x_0 + v_0^2 \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{g}$. Za dvojnásobný čas proletí těleso počáteční výškou y_0 rychlostí v_0 ve vzdálenosti $v_0^2 \frac{\sin 2\alpha}{g}$ od počáteční pozice x_0.



3.1 Příklad K.23/2

Spustíme kámen volným pádem do propasti o hloubce $h = 125\,\mathrm{m}$. Za jakou dobu se ozve výkřik vyděšeného speleologa, který se pohyboval na dně propasti? Předpokládejme rychlost šíření zvuku ve vzduchu $v = 340\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ a reakční dobu speleologa $1\,\mathrm{s}$.

Výsledek $t \approx 6.36\,\mathrm{s}$

3.2 Příklad K.25/5

Těleso padající volným pádem urazilo v poslední sekundě svého pádu 1/3 celkové dráhy. Z jaké výšky a jak dlouho těleso padalo?

Výsledek Řešíme kvadratickou rovnici pro čas, hledaným řešením je $t = 5.45\,\mathrm{s}$. Druhý kořen je kratší jak $1\,\mathrm{s}$ a nemůže tedy popisovat pád trvající víc jak jednu sekundu. Výška pádu je $h = 148.48\,\mathrm{m}$.

3.3 Příklad K.26/1

Těleso je vrženo svisle dolů do hloubky $h = 90\,\mathrm{m}$ počáteční rychlostí $v_0 = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Za jakou dobu a s jakou rychlostí dopadne?

Výsledek $t = 3.36\,\mathrm{s}$, $v = 43.6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

3.4 Příklad K.26/2

Dvě tělesa jsou vržena svisle vzhůru z téhož bodu stejnou počáteční rychlostí $v_0 = 24.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ s časovým odstupem $\tau = 1\,\mathrm{s}$. Za jakou dobu od počátku pohybu druhého tělesa a v jaké výšce se tělesa srazí? Předpokládejme $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

Výsledek $t \approx 2.00\,\mathrm{s}$, $h \approx 29.38\,\mathrm{m}$

3.5 Příklad K.26/3

Z věže o výšce $h = 44.1\,\mathrm{m}$ byl vodorovným směrem vržen kámen rychlostí $v_x = 25\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Předpokládejme $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Určete:

a) dobu t, za kterou kámen dopadne na zem,

b) vzdálenost od paty věže, do které kámen dopadne,

c) celkovou rychlost kamene v okamžiku dopadu.

Výsledek a) $t \approx 3.00\,\mathrm{s}$, b) $x \approx 74.96\,\mathrm{m}$, c) $v \approx 38.60\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

3.6 Příklad L.Kin.2/3

Z děla pobřežního dělostřelectva umístěného ve výšce $h = 30\,\mathrm{m}$ nad hladinou moře je vypálena střela pod úhlem $\alpha = 45°$ vzhledem k horizontální rovině a s počáteční rychlostí $v_0 = 1\,000\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Jaká je vodorovná vzdálenost mezi dělem a místem, ve kterém střela sejme cvičnou gumovou kachničku plovoucí na hladině moře? Odpor vzduchu zanedbejte a dále předpokládejme $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

Výsledek $s \approx 101.96\,\mathrm{km}$

4 Kinematika rotačního pohybu

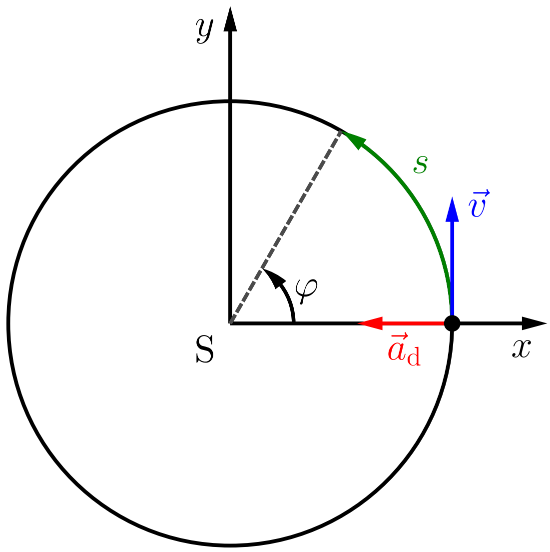
Polohu, rychlost a zrychlení rotačního pohybu lze popsat pomocí rovnic v kartézské soustavě souřadnic, kdy počátek souřadnic leží v ose otáčení:

poloha $x(t) = r\cos\omega t$, $y(t) = r\sin\omega t$,

rychlost $v_x(t) = -r\omega\sin\omega t$, $v_y(t) = r\omega\cos\omega t$,

zrychlení $a_x(t) = -r\omega^2\cos\omega t$, $a_y(t) = -r\omega^2\sin\omega t$,

kde $r = \sqrt{x^2+y^2}$ značí vzdálenost od osy rotace a ω značí **úhlovou frekvenci**. Úhlová frekvence je přímo úměrná frekvenci otáčení f podle vztahu $\omega = 2\pi f$. Frekvence je nepřímo úměrná době oběhu (periodě) $T = 1/f$. Vektor rychlosti má směr tečny k opsanému kruhu, velikost rychlosti $|v| = r\omega$. Při rovnoměrném pohybu je zrychlení vždy kolmé na směr rychlosti a směřuje směrem k ose otáčení. Velikost tohoto **dostředivého (normálového) zrychlení** je $a_\mathrm{d} = r\omega^2$. Pokud je pohyb nerovnoměrný (např. zrychlený), potom vzniká i tzv. **tečné zrychlení** $a_\mathrm{t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = r\varepsilon$ kolmé na dostředivé zrychlení. Celkové zrychlení je potom dáno vektorovým součtem obou složek s velikostí $|a| = \sqrt{a_\mathrm{d}^2 + a_\mathrm{t}^2}$.



Pro jednodušší popis pohybu po kružnici můžeme přejít do polárních souřadnic. Poloměr otáčení r je na čase nezávislý, co se mění je **úhlová dráha** $\varphi(t)$. Bod na obvodu kružnice urazí při otočení o úhel φ dráhu $s = r\varphi$. **Úhlová rychlost** $\omega(t)$ (fakticky totožná s úhlovou frekvencí) je definovaná jako časová změna (derivace) úhlové dráhy, $\omega(t) = \frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t}$. Přepočet úhlové a obvodové rychlosti opět počítá s poloměrem otáčení, $v = r\omega$.

Druhou derivací úhlové dráhy podle času získáme **úhlové zrychlení**, $\varepsilon = \frac{\mathrm{d}^2\varphi(t)}{\mathrm{d}t^2}$. V případě pohybu rovnoměrně zrychleného po kružnici ($\varepsilon = konst.$) dostaneme rovnice analogické přímočarému pohybu jen v polárních souřadnicích:

úhlová dráha $\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2$,

úhlová rychlost $\omega(t) = \omega_0 + \varepsilon t$,

kde φ_0 a ω_0 jsou počáteční hodnoty úhlové dráhy a rychlosti. Jako úhlové jednotky těchto závislostí se používají radiány, $2\pi\,\mathrm{rad} = 360°$.

4.1 Příklad K.27/1

Na rotující ose jsou upevněny ve vzdálenosti $s = 2\,\mathrm{m}$ dva kotouče, které se rovnoměrně otáčejí s frekvencí $f = 50\,\mathrm{Hz}$. Kotouče jsou proraženy střelou letící rovnoběžně s osou otáčení. Pokud od otvorů v kotoučích způsobených střelou povedeme úsečky ke středu otáčení, pak tyto úsečky spolu svírají úhel $\psi = 60°$. Jaká byla rychlost střely?

Výsledek $v = 600\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

4.2 Příklad K.28/2

Kolo o poloměru $r = 0.1\,\mathrm{m}$ se otáčí tak, že závislost úhlové dráhy na čase je dána vztahem $\varphi(t) = 2 + 5t^3$. Pro čas $t = 2\,\mathrm{s}$ určete:

a) rychlost bodů na obvodu kola,

b) tečné zrychlení těchto bodů,

c) normálové zrychlení.

Výsledek a) $v(2\,\mathrm{s}) = 6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, b) $a_t(2\,\mathrm{s}) = 6\,\mathrm{m/s^2}$, c) $a_d(2\,\mathrm{s}) = 360\,\mathrm{m/s^2}$

4.3 Příklad K.28/4

Kolo se roztáčí z klidu rovnoměrně zrychleně tak, že za dobu $t = 10\,\mathrm{s}$ dosáhne frekvence $f = 30\,\mathrm{Hz}$. Určete úhlové zrychlení kola a celkový počet otáček, které za danou dobu vykoná.

Výsledek $\varepsilon = 6\pi\,\mathrm{rad/s^2}$, 150 otáček

4.4 Příklad K.29/5

Frekvence setrvačníku klesla za dobu $t = 10\,\mathrm{s}$ z $f_0 = 15\,\mathrm{Hz}$ na $f = 10\,\mathrm{Hz}$. Vypočtěte úhlové zrychlení pohybu a počet otáček, které setrvačník za danou dobu vykonal.

Výsledek $\varepsilon = -\pi\,\mathrm{rad/s^2}$, 125 otáček

4.5 Příklad K.30/1

Hmotný bod se pohybuje po kružnici o poloměru $r = 0.2\,\mathrm{m}$, přičemž úhel, který svírá průvodič bodu s osou x, závisí na čase vztahem $\varphi(t) = (2t^2 + 4t + 6)$ rad. Pro čas $t = 0.5\,\mathrm{s}$ určete:

a) rychlost hmotného bodu, **b)** tečné zrychlení,

c) normálové zrychlení, **d)** úhel α, který svírá celkové zrychlení s průvodičem.

Výsledek a) $v = 1.2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, b) $a_t = 0.8\,\mathrm{m/s^2}$, c) $a_d = 7.2\,\mathrm{m/s^2}$, d) $\alpha \approx 6.34°$

4.6 Příklad K.31/3

Otáčky setrvačníku klesly z $n_1 = 900$ ot/min na $n_2 = 800$ ot/min za dobu $t = 5\,\mathrm{s}$. Najděte jeho úhlové zrychlení ε a počet otáček N, které setrvačník vykonal za těchto 5 s. Kolik sekund ještě uplyne, než se setrvačník zastaví?

Výsledek $\varepsilon = -2\pi/3\,\mathrm{rad/s^2}$, 70 a 5/6 otáčky, $t = 40\,\mathrm{s}$

4.7 Příklad K.31/4

Setrvačník se otočí za dobu 3 s o úhel 234 rad. Jeho úhlová rychlost na konci třetí sekundy je $96\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$. Najděte jeho úhlové zrychlení ε o němž je známo, že je konstantní.

Výsledek $\varepsilon = 12\,\mathrm{rad/s^2}$

4.8 Příklad K.31/5

Setrvačník, jehož úhlové zrychlení je konstantní a rovno $\varepsilon = 2\,\mathrm{rad\,s^{-2}}$, se otočil za dobu $t = 5\,\mathrm{s}$ o úhel 75 rad. Jak dlouho byl již v pohybu před začátkem pětisekundového intervalu, jestliže se rozebíhá z klidu?

Výsledek 5 s

4.9 Příklad L.Kin.3/1

Voda v náhonu tekoucí rychlostí $v = 5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ roztáčí mlýnské kolo o průměru $d = 5\,\mathrm{m}$. Kolik otáček za minutu mlýnské kolo vykoná? Tření zanedbejte.

Výsledek $60/\pi \approx 19.1$ otáček za minutu

4.10 Příklad L.Kin.3/2

Minutová ručička je dvakrát delší než ručička hodinová. Kolikrát rychleji se pohybuje její koncový bod než koncový bod hodinové ručičky?

Výsledek 24krát

4.11 Příklad L.Kin.3/3

Mé hodinky se předbíhají o 3 minuty za den. Hodinky mého kolegy o 4 minuty za den. Za kolik dní budou hodinky mé a mého kolegy zároveň ukazovat opět správný čas, když jsme si je současně dnes oba seřídili?

Výsledek Pokud budeme předpokládat klasické ručičkové hodinky s dvanáctihodinovým cyklem, potom oba zároveň budeme mít přesný čas za 720 dní.

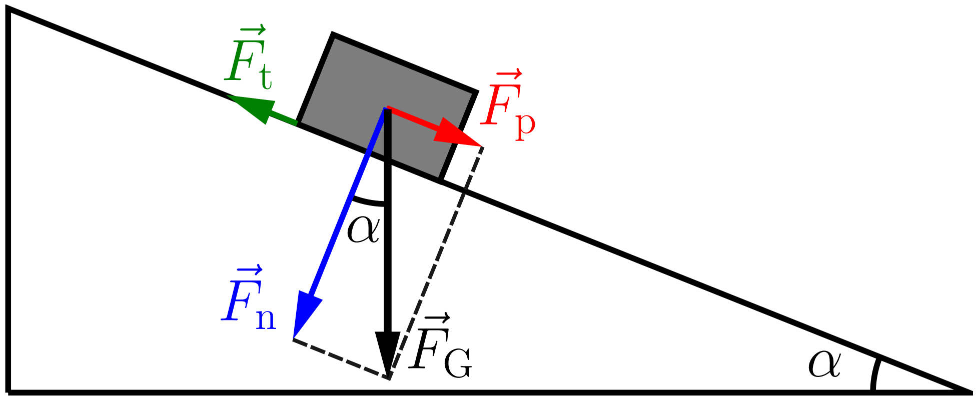
5 Dynamika translačního pohybu

Dynamika popisuje důvody pohybu. Tedy pokud je těleso o hmotnosti m v klidu, tak jej do pohybu uvedeme působením síly $\vec{F}$, přičemž se bude těleso pohybovat se zrychlením $\vec{a} = \vec{F}/m$. Při rozboru úloh nesmíme zapomenout na všechny relevantní síly působící na těleso.

Pro ukázku zvolme pohyb tělesa po **nakloněné rovině**. Zde vstupuje do výpočtu gravitační síla $\vec{F}_\mathrm{G} = m\vec{g}$ a síla třecí, $F_\mathrm{t} = fF_\mathrm{n}$. Třecí síla působí v rovině plochy, po které se předmět pohybuje, proti směru jeho pohybu. Velikost této síly je úměrná síle F_n, kterou působí těleso na plochu svou vahou, a na **součiniteli smykového tření** f.

Pokud má plocha sklon α vzhledem k horizontální rovině, potom se gravitační síla rozloží do směru rovnoběžného s plochou s velikostí $F_\mathrm{p} = F_\mathrm{G}\sin\alpha = mg\sin\alpha$ a do směru kolmého, kterou těleso tlačí na plochu, s velikostí $F_\mathrm{n} = F_\mathrm{G}\cos\alpha$. Třecí síla brzdící pohyb má tedy velikost $F_\mathrm{t} = fF_\mathrm{n} = fmg\cos\alpha$. Výsledná síla je rozdílem velikostí těchto dvou sil, jelikož jsou síly rovnoběžné a opačného směru, $F = F_\mathrm{p} - F_\mathrm{t}$. Tato síla způsobí zrychlení a, s kterým se bude těleso pohybovat:

$$F = ma = F_\mathrm{G}(\sin\alpha - f\cos\alpha) = mg(\sin\alpha - f\cos\alpha), \qquad a = g\cos\alpha(\tan\alpha - f).$$



V závislosti na úhlu sklonu plochy α a velikosti součinitele smykového tření f mohou nastat tyto tři možnosti:

$\tan\alpha > f$ – zrychlení $a > 0$ a těleso v pohybu zrychluje,

$\tan\alpha = f$ – zrychlení je nulové, těleso se pohybuje stále stejnou rychlostí (pokud na začátku stálo, tak bude stát i dál),

$\tan\alpha < f$ – zrychlení $a < 0$, pokud se těleso pohybovalo, tak bude zpomalovat do úplného zastavení.

Pokud je tření zanedbatelné ($f \ll$), potom se těleso pohybuje se zrychlením $a = g\sin\alpha$.

Třecí síla je jednou ze sil, které formují **odpor prostředí**. Odporové síly působí proti směru pohybu tělesa.

5.1 Příklad L.Dyn.1.2

Určete zrychlení soustavy dvou těles o hmotnostech m_1 a m_2 zavěšených přes pevnou kladku tak, že:

a) obě tělesa jsou ve vzduchu,

b) těleso o hmotnosti m_1 je na podložce stolu,

c) těleso o hmotnosti m_1 je na nakloněné rovině s úhlem sklonu α.

Všechny třecí síly zanedbejte.

Výsledek a) $a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$, b) pokud $m_1 \geq m_2$, potom $a = 0$, jinak $a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}$, c) $a = \frac{m_1 \sin\alpha - m_2}{m_1 + m_2}$

5.2 Příklad L.Dyn.1.3

Po nakloněné rovině s úhlem sklonu α se smýká těleso a pohybuje se přitom konstantní rychlostí. Určete součinitel smykového tření f.

Výsledek $f = \tan\alpha$

5.3 Příklad K.40/5

Těleso o hmotnosti $m = 4\,\mathrm{kg}$ je v gravitačním poli Země zrychlováno směrem vzhůru provázkem, který se přetrhne, je-li napínán silou větší či rovnou $F = 100\,\mathrm{N}$. Najděte maximální zrychlení, které můžeme tělesu udělit, aniž by se provázek přetrhl.

Výsledek $a = 15\,\mathrm{m/s^2}$

5.4 Příklad K.36/4

Těleso sklouzlo po nakloněné rovině o délce $s = 4\,\mathrm{m}$, která svírá s vodorovnou rovinou úhel $\alpha = 30°$, za dobu $t = 2\,\mathrm{s}$. Určete součinitel smykového tření mezi tělesem a rovinou.

Výsledek $f \approx 0.35$

5.5 Příklad Z2 K.39/1

V nejvyšším bodě nakloněné roviny o délce $d = 1.2\,\mathrm{m}$ a výšce $h = 0.3\,\mathrm{m}$ je upevněna kladka. Na jednom konci lana vedeného přes kladku je upevněno těleso o hmotnosti $m_1 = 0.5\,\mathrm{kg}$, které se pohybuje po nakloněné rovině. Na druhém konci lana visí těleso o hmotnosti $m_2 = 0.14\,\mathrm{kg}$. Předpokládejme, že hmotnosti kladky a lana můžeme zanedbat. Tření taktéž neuvažujeme. Určete:

a) zrychlení pohybu,

b) sílu, kterou je napínáno lano,

c) dobu, po kterou trvá pohyb po nakloněné rovině.

Výsledek $a \approx 0.23\,\mathrm{m/s^2}$, $F = 2.65\,\mathrm{N}$, pokud bylo první těleso na spodním konci nakloněné roviny a druhému tělesu nic nebrání v cestě do hlubin, potom $t \approx 3.23\,\mathrm{s}$

5.6 Příklad L.Dyn.1.1

Těleso o hmotnosti m pohybující se přímočaře rychlostí v_0 má být zabrzděno konstantní silou F na dráze s. Určete tuto sílu.

Výsledek $F = ma = mv_0^2/(2s)$

5.7 Příklad K.40/3

Střela o hmotnosti $m = 0.024\,\mathrm{kg}$ měla před zásahem překážky rychlost $v_0 = 400\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Vypočítejte odpor prostředí (odporovou sílu F_o), jestliže střela vnikla do překážky do hloubky $s = 0.5\,\mathrm{m}$.

Výsledek $F_o = 3\,840\,\mathrm{N}$

5.8 Příklad K.40/4

Střela letící rychlostí $v_0 = 360\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ zasáhne překážku z měkkého dřeva a vnikne do hloubky $s = 0.1\,\mathrm{m}$. Hmotnost střely je $m = 0.001\,8\,\mathrm{kg}$. Určete, za jakou dobu t se střela v překážce zastaví za předpokladu, že brzdící síla je konstantní, a jak velká brzdící síla na střelu působila.

Výsledek $t = 0.\overline{5}\,\mathrm{ms}$, $F_o = 1\,166.4\,\mathrm{N}$

5.9 Příklad K.40/2

Najděte nejkratší vzdálenost s, na které se může zastavit automobil jedoucí po vodorovné silnici rychlostí $v_0 = 130\,\mathrm{km/hod}$, je-li koeficient tření mezi pneumatikami a silnicí $f = 0.8$.

Výsledek $s \approx 81.5\,\mathrm{m}$

5.10 Příklad L.Dyn.1.4

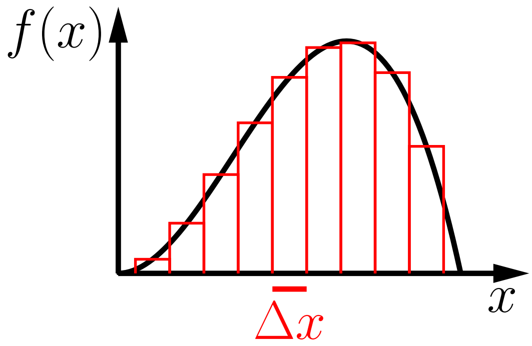
Určete nejmenší koeficient smykového tření mezi koly automobilu a asfaltem nutný pro to, aby vůz mohl projet zatáčku o poloměru $r = 200\,\mathrm{m}$ rychlostí $v = 100\,\mathrm{km/hod}$.

Výsledek $f \approx 0.386$

Integrál

Integrál je matematická metoda k určení plochy pod křivkou, která je dána funkcí $f(x)$. Integrál může být **neurčitý**, kdy nejsou definovány integrační meze, nebo může být **určitý**, kdy nás zajímá plocha jen mezi body x_0 a x_1. Musíme dát ale pozor na to, že v konečném součtu jsou plochy nad osou x brány s kladným znaménkem, kdežto plochy pod osou se záporným.

V případě, že je funkce konstantní, tj. $f = a$ nezávisle na hodnotě x, potom se plocha vypočítá jednoduše podle vzorce $S = a \cdot (x_1 - x_0)$. V případě složitější funkce musíme rozdělit zkoumaný interval na menší oblasti s délkou Δx. Celková plocha potom bude součtem ploch získaných vynásobením funkční hodnoty a Δx. Náš výpočet bude tím přesnější, čím bude Δx menší. V limitním případě nám přejde diskrétní suma ve spojitý integrál:



$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x_0}^{x_1} f(x) \cdot \Delta x = \int_{x_0}^{x_1} f(x) \, \mathrm{d}x$$

Neurčitý integrál je inverzní funkcí derivace, pokud funkci získanou integrací zderivujeme, musíme dostat výchozí funkci. Například neurčitý integrál z konstanty a je funkce $f(x) = ax + c$, kde c je jakákoliv konstanta. Při derivaci konstanta c zařve a zůstane jen konstanta a. V případě určitého integrálu je výsledkem číslo – velikost plochy. Určitý integrál se spočítá tak, že se nejdřív zjistí funkce neurčitého integrálu a do ní postupně dosadíme za proměnnou x horní a dolní mez a tyto dvě hodnoty odečteme:

$$\int_{x_0}^{x_1} a \, \mathrm{d}x = [ax + c]_{x_0}^{x_1} = (ax_1 + c) - (ax_0 + c) = a \cdot (x_1 - x_0)$$

Pravidla pro integrály

- Konstanty násobící funkci můžeme vytknout před.
- Integrál součtu je součet integrálů.
- Vhodná substituce proměnných může zjednodušit výpočet, nesmí se zapomenout příslušně transformovat i $\mathrm{d}x$ a meze integrace.
- Metoda *per partes* a podobné triky.

Základní integrační vzorečky

$$\int ax^n \, \mathrm{d}x = a\frac{1}{n+1}x^{n+1} + c, \qquad \int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln|x| + c, \qquad \int e^x \, \mathrm{d}x = e^x + c$$

$$\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x + c, \qquad \int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x + c.$$

Například $\int_0^\pi \sin x \, \mathrm{d}x = [-\cos x]_0^\pi = -[-1 - 1] = 2$, nicméně $\int_0^\pi \cos x \, \mathrm{d}x = 0$ – půl plochy nad a půl pod osou x. Stejně to dopadne, pokud budeme obě tyto funkce integrovat v rozsahu $(-\infty, \infty)$.

6 Práce, energie, výkon

Mechanická **práce** je definovaná jako síla působící na těleso po určité dráze. Jednoduše řečeno, vykonáme práci, pokud těleso posuneme. Nicméně pro výpočet práce je také důležitý směr síly $\vec{F}$ vůči vektoru posunutí $\vec{s}$. V případě, že jsou oba tyto vektory rovnoběžné a míří stejným směrem, potom lze práci vypočítat nejsnáze, $W = Fs$. Svírá-li síla s dráhou konstantní úhel α, potom je práce definovaná skalárním součinem obou vektorů, $W = \vec{F} \cdot \vec{s} = Fs\cos\alpha$. V případě, kdy je v každém bodě dráhy úhel mezi silou a dráhou různý, například se těleso pohybuje po zakřivené dráze nebo se síla mění, potom je práce určena integrálem ze skalárního součinu přes celou dráhu,

$$W = \int_0^s \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_0^s Fs\cos\alpha\,\mathrm{d}s.$$

Pokud je hodnota práce kladná, pak těleso energii získává. Pokud je práce záporná, značí to, že těleso práci koná a ztrácí tím energii.

Obrázek 1: Nadhazovač vykonal práci úměrnou síle a dráze, čímž míček získal kinetickou energii.

Jednotkou práce je joule, J=kg m^2 s^{-2}. Jedná se o stejnou jednotku, jakou používá **energie**. V mnoha příkladech budeme řešit, že je na tělesu vykonaná práce, přičemž tato práce povede ke zvýšení (snížení) energie tělesa. Například, zvedneme-li těleso o hmotnosti m do výšky h v gravitačním poli Země, vykonáme práci $W = Fh = mgh = E_\mathrm{p}$, která je rovna **potenciálové energii**. Necháme-li potom toto těleso z výšky h spadnout volným pádem, potom na úrovni země nebude mít žádnou potenciálovou energii, všechna energie se změní v **energii kinetickou** (pohybovou), $E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2$, kde rychlost $v = \sqrt{2gh}$.

Tuto transformaci energie v izolované soustavě nazýváme **zákonem zachování energie**. Další zachovávající se veličinou v mechanice je hybnost $\vec{p} = m\vec{v}$. **Zákon zachování hybnosti** využijeme v případech, kdy se mohla kinetická energie tělesa přeměnit i v jiné druhy energie, například v teplo. Typickou úlohou je balistické kyvadlo, kdy po nárazu kulky dochází k vychýlení úměrné rychlosti kulky. Pokud řešíme úlohu **dokonale pružné srážky**, tak můžeme využít oba tyto zákony, protože se v tomto případě kinetická energie před a po srážce nezmění.

Veličinou vázanou na práci je **výkon** P, který je definován jako provedená práce za určitý čas. Pokud je výkon konstantní, potom je výpočet jednoduchý, $P = W/t = Fs/t$ s jednotkou watt [W=J/s]. Okamžitý výkon lze určit derivací práce podle času,

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \frac{\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s}}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \cdot \vec{v}.$$

6.1 Příklad K.43/2

Síla $\vec{F} = (2xz\vec{i} + 3z^2\vec{j} + y^2\vec{k})$ N Působí na hmotný bod, který se pohybuje po přímce $x = 2y = 4z$. Určete práci W, kterou je potřeba vykonat při pohybu z místa A(0,0,0) do místa B(4,2,1).

Výsledek $W = 14\,\mathrm{J}$

6.2 Příklad K.47/1

Síla $\vec{F} = (4y\vec{i} + 2x\vec{j} + \vec{k})$ N působí na hmotný bod, který se pohybuje po křivce dané parametrickými rovnicemi: $x = 4\cos\delta$, $y = 4\sin\delta$ a $z = 2\delta$. Vypočítejte práci při změně hodnoty δ z 0 na 2π. Mohou vám pomoci následující trigonomitrické vzorce:

$$\sin^2\delta = \frac{1-\cos 2\delta}{2}, \qquad \cos^2\delta = \frac{1+\cos 2\delta}{2}.$$

Výsledek $W = -28\pi\,\mathrm{J}$

6.3 Příklad K.47/2

Jakou mechanickou energii má matematické kyvadlo o délce $l = 1\,\mathrm{m}$ a hmotnosti $m = 1\,\mathrm{kg}$, je-li jeho maximální odchylka od rovnovážné polohy $\phi = 30°$? Předpokládejte gravitační zrychlení $g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$.

Výsledek $W \approx 1.31\,\mathrm{J}$

6.4 Příklad K.48/7

Střela o hmotnosti $m = 0.002\,\mathrm{kg}$ opouští ústí pušky rychlostí $v_0 = 300\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Vypočtěte délku hlavně, jestliže výslednice sil působících na střelu v hlavni je dána vztahem $F = 400 - \frac{8000}{9}x$.

Výsledek $l = 0.45\,\mathrm{m}$

6.5 Příklad K.48/8

Střela letící rychlostí $v_0 = 400\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ narazí na dřevěný kvádr a vnikne do něj do hloubky $h_1 = 0.3\,\mathrm{m}$. Kdyby byla tatáž střela vystřelena na kvádr tloušťky $h_2 = 0.15\,\mathrm{m}$, jakou rychlostí v_2 by z kvádru vylétla? Předpokládejme, že odpor dřeva je konstantní.

Výsledek $v_2 = 200\sqrt{2}\,\mathrm{m\,s^{-1}} \approx 282.8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

6.6 Příklad K.49/10

Automobil jede rychlostí $v_0 = 48\,\mathrm{km/hod}$, přičemž musí motor vyvíjet výkon $P = 15\,\mathrm{kW}$. Jaký je odpor F_o působící proti pohybu automobilu? Jaký odpor by byl při stejném výkonu motoru ale a) poloviční, b) dvojnásobné rychlosti automobilu?

Výsledek $F_o = 1.125\,\mathrm{kN}$, a) $2.5\,\mathrm{kN}$, b) $562.5\,\mathrm{N}$
PS: Z příkladu může vzniknout mylná domněnka, že je při vyšších rychlostech menší odpor vzduch. Tak to není, při malých rychlostech je odpor prostředí závislý lineárně (při vyšších kvadraticky) na rychlosti proudění. Spíš to můžeme chápat tak, že s daným výkonem motoru pojede aerodynamický sporťák mnohem rychleji, než hranatá dodávka, protože bude „cítit“ menší odpor prostředí.

6.7 Příklad L.Dyn.1/6

Raketa o hmotnosti $m = 20\,\mathrm{t}$ dosáhne výšky $h = 5\,\mathrm{km}$ za čas $t = 10\,\mathrm{s}$. Jaký je výkon jejích motorů? Předpokládejme konstantní gravitační pole se zrychlením $g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

Výsledek $P = 100\,\mathrm{MW}$

6.8 Příklad K.55/1

Střela o hmotnosti $m_1 = 0.2\,\mathrm{kg}$ byla vystřelena do balistického kyvadla o hmotnosti $m_2 = 5\,\mathrm{kg}$. Po nárazu se těžiště kyvadla zvedlo o $h = 0.1\,\mathrm{m}$. Určete rychlost střely v_0.

Výsledek $v_0 = 26\sqrt{2}\,\mathrm{m\,s^{-1}} \approx 36.77\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

6.9 Příklad K.55/2

Granát letící rychlostí $v = 15\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ se roztrhl na dvě části o hmotnostech $m_1 = 6\,\mathrm{kg}$ a $m_2 = 14\,\mathrm{kg}$. Rychlost většího kusu se zvětšila na $v_2 = 24\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ v původním směru letícího granátu. Jaká je rychlost v_1 menšího kusu?

Výsledek $v_1 = -6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

6.10 Příklad K.56/5

Granát o hmotnosti $m = 20\,\mathrm{kg}$ letící rychlostí $v = 150\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ se roztrhne na dvě části. Větší část o hmotnosti $m_1 = 12\,\mathrm{kg}$ letí dále v původním směru rychlostí $v_1 = 250\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Určete rychlost menší části granátu.

Výsledek $v_2 = 0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

6.11 Příklad K.55/3

Na jednom konci desky délky $l = 3.6\,\mathrm{m}$ hmotnosti $m_1 = 45\,\mathrm{kg}$ stojí člověk hmotnosti $m_2 = 90\,\mathrm{kg}$. Deska leží na vodorovné rovině, po které se může pohybovat bez tření. Jak daleko se deska posune, přejde-li člověk po desce na opačný konec? Použijte z.z. hybnosti.

Výsledek $d = 2.4\,\mathrm{m}$

6.12 Příklad K.56/6

Střela o hmotnosti $m_1 = 0.002\,\mathrm{kg}$ letící rychlostí $v_0 = 500\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ je vystřelena na balistické kyvadlo o hmotnosti $m_2 = 1\,\mathrm{kg}$, které visí na závěsu délky $l = 1\,\mathrm{m}$. Střela pronikne kyvadlem a vyletí z něho rychlostí $v_1 = 100\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. O Jaký úhel se kyvadlo vykloní?

Výsledek $\alpha = 14.5°$

6.13 Příklad K.56/7

Prázdný nákladní vagón o hmotnosti $m_1 = 10$ tun se pohybuje rychlostí $v_1 = 0.9\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ po vodorovné trati a srazí se s naloženým vagónem o hmotnosti $m_2 = 20$ tun stojícím v klidu s uvolněnými brzdami. Jsou-li oba vozy při nárazu posunovačem spojeny, najděte jejich rychlost v po srážce a úbytek jejich kinetické energie. Jakou rychlostí v_2 by se musel pohybovat naložený vagón směrem k prázdnému, aby oba zůstaly po srážce v klidu?

Výsledek $v = 0.3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $\Delta E_k = 2.7\,\mathrm{kJ}$, $v_2 = -0.45\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

6.14 Příklad K.56/8

Jestliže míč spadne z výšky $h = 2.4\,\mathrm{m}$, odrazí se do výšky $h' = 0.9\,\mathrm{m}$. S jakou rychlostí musí míč narazit horizontálně na svislou stěnu ve výšce $h_0 = 1.8\,\mathrm{m}$ nad zemí, aby po nárazu dopadl na zem ve vzdálenosti $d = 4.8\,\mathrm{m}$ od stěny? Předpokládejme $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

Výsledek $v_0 \approx 12.94\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

6.15 Příklad K.57/9

Koule byla vržena z výšky $h = 20\,\mathrm{m}$ svisle dolů a odrazila se od vodorovné roviny poprvé do výšky $h_1 = 10\,\mathrm{m}$ a podruhé do výšky $h_2 = 4\,\mathrm{m}$. Určete počáteční rychlost v_0, se kterou byla koule vržena.

Výsledek $v_0 = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

6.16 Příklad L.Dyn.1/5

Koule o hmotnosti $m_1 = 5\,\mathrm{kg}$ a s rychlostí $v_1 = 3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ narazí čelně na druhou kouli, která je v klidu a má hmotnost $m_2 = 4\,\mathrm{kg}$. Jakou rychlost bude mít druhá koule za předpokladu, že je srážka dokonale pružná?

Výsledek $v_2' = 10/3\,\mathrm{m\,s^{-1}} \approx 3.33\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
PS: Výsledek $v_2' = 0 \rightarrow v_1' = -v_1$, tedy že se těžší koule od lehčí odrazí stejnou rychlostí zpátky, ignorujeme. Ze zkušenosti víme, že nenastane, pokud druhou kouli nepřišroubujeme k podložce.

7 Gravitační zákon a pohyb částice v poli centrální síly

Pohybem planet kolem slunce se zabývají astronomové už pár tisíciletí. Začátkem 17. století definoval Kepler tři zákonitosti, které platí nejen pro planety, ale i pro jakákoliv tělesa v centrálním silovém poli, kde přitažlivost klesá s druhou mocninou vzdálenosti:

1. Planety obíhají kolem slunce po eliptických drahách, v jejichž jednom společném ohnisku je Slunce.
2. Obsahy ploch opsaných průvodičem planety za stejný čas jsou stejně velké.
3. Poměr druhých mocnin oběžných dob dvou planet je stejný jako poměr třetích mocnin délek jejich hlavních poloos.

O pár desítek let později představil Newton gravitační zákon, který určil sílu, která přitahuje dvě hmotná tělesa k sobě,

$$F_\mathrm{g} = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^2}, \qquad \kappa = 6.674\,28 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}},$$

kde $m_{1,2}$ jsou hmotnosti těles a r jejich vzdálenost.

Gravitační síla je nicméně jen jednou ze sil, které formují tíhovou sílu $\vec{F}_\mathrm{G}$. Další je odstředivá síla působící proti síle gravitační $\vec{F}_\mathrm{o} = m\vec{a}_\mathrm{o}$ a Coriolisova síla $\vec{F}_\mathrm{C} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}$, zde $\vec{\omega}$ je vektor úhlové rychlosti otáčení soustavy. Tato síla je největší, pokud se těleso pohybuje ve směru kolmém k ose otáčení.

Pokud budeme předpokládat těleso o hmotnosti m ležící bez pohybu na povrchu Země v místě rovníku, bude na něj působit pouze gravitační a odstředivá síla,

$$F_\mathrm{g} = \kappa \frac{M_\mathrm{Z} m}{R_\mathrm{Z}^2}, \qquad F_\mathrm{o} = m a_\mathrm{o} = m\omega^2 R_\mathrm{Z},$$

kde $\omega = 2\pi/T$ je úhlová frekvence oběhu Země. Velikost tíhové síly bude rovna $F_\mathrm{G} = F_\mathrm{g} - F_\mathrm{o} = mg$. Dosadíme-li přesné hodnoty, získáme tíhové zrychlení na rovníku

$$g = \kappa \frac{M_\mathrm{Z}}{R_\mathrm{Z}^2} - \frac{4\pi^2}{T^2} R_\mathrm{Z} \approx (9.795 - 0.034)\,\mathrm{m\,s^{-2}} = 9.761\,\mathrm{m\,s^{-2}}.$$

Pro popis gravitační potenciální energie se používá gravitační potenciál $\phi(r) = -\kappa M_\mathrm{Z}/r$, kde r je vzdálenost tělesa od středu Země. Tento potenciál je záporný, nuly dosáhne v nekonečnu. Tento potenciál je normován na jednotkovou hmotnost. Pokud těleso o hmotnosti m klesne z výšky $R_\mathrm{Z} + h$ do výšky R_Z, kde $h \ll R_\mathrm{Z}$, změní se jeho potenciální energie o

$$\Delta E = -\kappa \frac{m M_\mathrm{Z}}{R_\mathrm{Z} + h} - \left(-\kappa \frac{m M_\mathrm{Z}}{R_\mathrm{Z}}\right) = -\kappa m M_\mathrm{Z} \frac{R_\mathrm{Z} - R_\mathrm{Z} - h}{R_\mathrm{Z}^2 + R_\mathrm{Z} h} \approx m\kappa \frac{M_\mathrm{Z}}{R_\mathrm{Z}^2} h = mgh.$$

hmotnost Země	poloměr Země R_Z	
$M_\mathrm{Z} = 5.97 \times 10^{24}\,\mathrm{kg} \approx 6 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$	na pólu	$6\,356.750\,\mathrm{km}$
délka dne	na rovníku	$6\,378.135\,\mathrm{km}$
$T = 86\,400\,\mathrm{s} \approx 23\,\mathrm{hod}\,56\,\mathrm{min}$		šetři se osle

7.1 Příklad K.58/2

Do jaké výšky h vystoupá těleso o hmotnosti m v gravitačním poli Země, je-li vystřeleno z povrchu Země na pólu rychlostí $v_0 = 5\,\mathrm{km\,s^{-1}}$. Odpor prostředí zanedbejte, gravitační zrychlení g nelze považovat za konstantní. Nápověda: použijte gravitační potenciál a zákon zachování energie.

Výsledek $h \approx 1\,583\,\mathrm{km}$

7.2 Příklad K.62/2

Jakou počáteční rychlost v_0 ve směru svisle vzhůru musíme udělit raketě, aby nad pólem vystoupala do výšky rovné poloměru Země? Odpor prostředí zanedbejte. Nápověda: použijte gravitační potenciál a zákon zachování energie.

Výsledek $v_0 \approx 7.9\,\mathrm{km\,s^{-1}}$

7.3 Příklad K.61/5

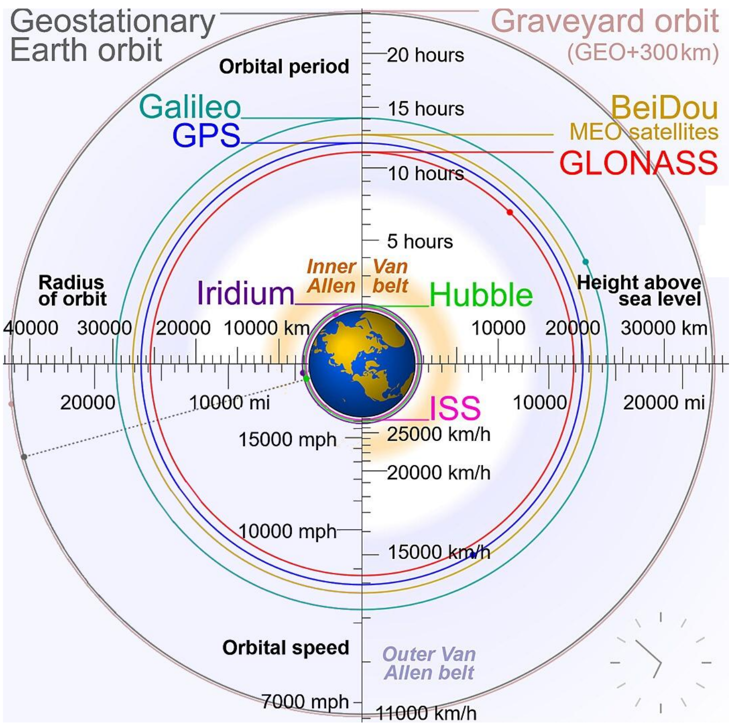
V jaké výšce musí obíhat umělá družice Země, aby byla stále nad stejným místem rovníku?

Výsledek $h \approx 35\,787\,\mathrm{km}$

7.4 Příklad K.62/3

V jaké výšce nad povrchem Země je gravitační zrychlení poloviční vzhledem ke zrychlení na povrchu Země?

Výsledek $h \approx 2\,642\,\mathrm{km}$



7.5 Příklad K.62/1

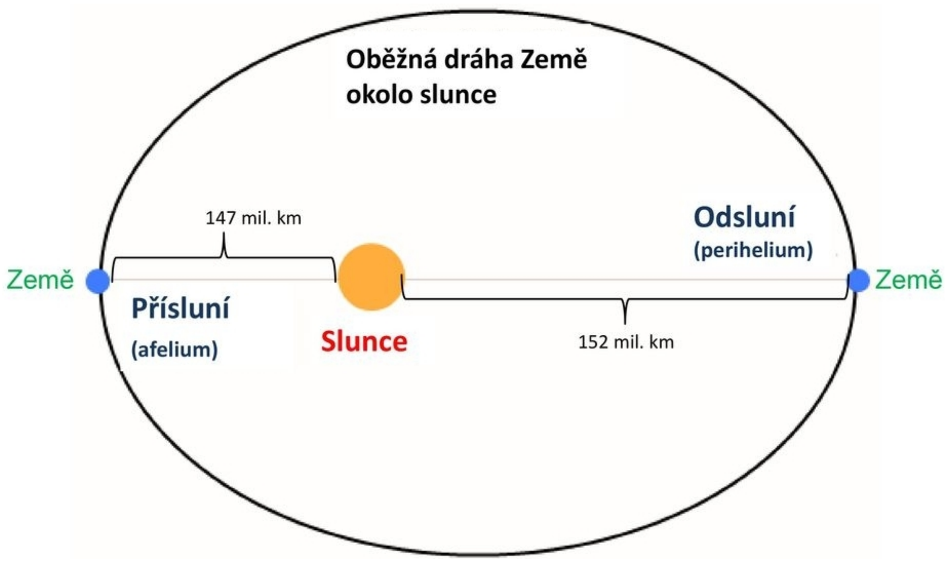
Určete potenciál gravitačního pole velmi tenké homogenní tyče délky l a hmotnosti m, v bodě P, který leží na prodloužené podélné ose tyče ve vzdálenosti b od jejího konce.

Výsledek $\phi = \frac{\kappa m}{l} \ln \frac{b}{b+l}$

7.6 Příklad K.63/7

Určete hmotnost Slunce M_S z poloměru trajektorie R (předpokládejme, že je kruhová) a z doby oběhu Země kolem Slunce T. Poloměr trajektorie $R = 149\,504\,200\,\mathrm{km}$ a $T = 365.2564$ středních slunečních dnů.

Výsledek $M_\mathrm{S} \approx 1.985 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$



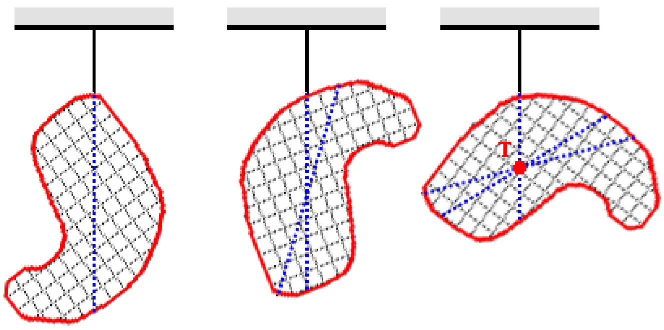
7.7 Příklad K.64/10

Určete gravitační zrychlení na povrchu Marsu. Poloměr Marsu je $R_\mathrm{M} = 3\,400\,\mathrm{km}$ a jeho hmotnost je $M_\mathrm{M} = 6.46 \times 10^{23}\,\mathrm{kg}$.

Výsledek $g_\mathrm{M} \approx 3.73\,\mathrm{m/s^2}$

8 Těžiště, hmotný střed

Těžištěm tělesa rozumíme místo, kde působí tíhová síla. Z hlediska působení sil, které způsobují posuv a ne rotaci, by se dalo celé těleso zaměnit za kuličku o hmotnosti celého tělesa v místě těžiště. V homogenním gravitačním poli je poloha těžiště totožná s **hmotným středem**. V případě bez gravitace pozbývá těžiště smysl, musíme použít hmotný střed.



Polohu těžiště můžeme určit jako průsečík **těžnic**. Pokud těleso zavěsíme za jakýkoliv bod na povrchu, potom bude těžnice procházet tímto bodem a směřovat přímo k zemi.

Souřadnice těžiště v prostoru, $(x_\mathrm{T}, y_\mathrm{T}, z_\mathrm{T})$, můžeme spočítat nezávisle, tedy každou zvlášť. Pokud se jedná o spojité (jednolité) těleso, potom je x-ová souřadnice těžiště rovna $x_\mathrm{T} = \frac{1}{m}\int x\,\mathrm{d}m$, kde se integruje přes všechny elementy hmotnosti $\mathrm{d}m$ na pozicích x. V případě soustavy těles přejde spojitý integrál na diskrétní sumu, tedy

$$x_\mathrm{T} = \frac{1}{m}\sum_i m_i x_i.$$

Například, máme-li dvě tělesa o hmotnostech m_1 a m_2 na pozicích x_1 a x_2, potom leží těžiště na pozici

$$x_\mathrm{T} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Analogicky by jsme postupovali při výpočtu těžiště podle objemu popřípadě podle plochy. Za předpokladu, že má celé plošné těleso hmotnost rozprostřenou homogenně, použijeme místo elementu hmotnosti $\mathrm{d}m$ element plochy $\mathrm{d}S$, tedy $x_\mathrm{T} = \frac{1}{S}\int x\,\mathrm{d}S$. Hledáme-li těžiště plochy složené z vícero elementů, potom můžeme použít diskrétní vzorec

$$x_\mathrm{T} = \frac{\sum_i x_i S_i}{\sum_i S_i}.$$

Pokud z určitého tělesa (plochy) část chybí, můžeme dopočítat těžiště za předpokladu, že známe polohu a hmotnost (plochu) celku i chybějící části. Použije se upravený vzorec, ve kterém jsou chybějící části se záporným znaménkem. Například vystřihneme-li z plochy S, která má těžiště na pozici x, část o ploše S_1, přičemž těžiště této subplochy je na pozici x_1, potom je těžiště zbytku plochy na poloze

$$x_\mathrm{T} = \frac{Sx - S_1 x_1}{S - S_1}.$$

Síly působící mezi částmi tělesa (vnitřní síly v izolované soustavě) nemají žádný vliv na celkový pohyb tělesa, přesněji řečeno na pohyb jeho těžiště. Platí tedy zákon setrvačnosti, tělesem mohou pohnout jen vnější síly.

8.1 Příklad L.Statika.1/1

Určete polohu hmotného středu soustavy Země-Měsíc, víte-li, že hmotnost Země je $81\times$ větší než hmotnost Měsíce a vzdálenost středů obou těles je $d = 384\,000\,\mathrm{km}$. Porovnejte vzdálenost hmotného středu soustavy od středu Země s poloměrem R_Z.

Výsledek $x_\mathrm{T} \approx 4\,683\,\mathrm{km} \approx 0.73 R_\mathrm{Z}$

8.2 Příklad L.Statika.1/2

Čtyři hmotné body o hmotnostech $m_1 = 2\,\mathrm{g}$, $m_2 = 5\,\mathrm{g}$, $m_3 = 10\,\mathrm{g}$ a $m_4 = 7\,\mathrm{g}$ jsou rozloženy v prostoru tak, že mají polohy $\mathrm{A}_1(-2, 7, 5)$, $\mathrm{A}_2(2, -4, -4)$, $\mathrm{A}_3(-4, 2, 7)$ a $\mathrm{A}_4(-2, -2, -6)$, kde souřadnice jsou v centimetrech. Určete souřadnice hmotného středu této soustavy.

Výsledek T(-2,0,0.75) [cm]

8.3 Příklad H.81/127

Mějme soustavu tří hmotných bodů s hmotnostmi $m_1 = 5\,\mathrm{g}$, $m_2 = 10\,\mathrm{g}$ a $m_3 = 15\,\mathrm{g}$. V čase $t = 0\,\mathrm{s}$ jsou v klidu na polohách $\mathrm{A}(3, 4, 5)$, $\mathrm{B}(-2, 4, -6)$ a $\mathrm{C}(0, 0, 0)$, kde souřadnice v závorkách jsou zadané v centimetrech. Na soustavu hmotných bodů působí vnější síly, jejichž výslednice je dána vektorem $\vec{F} = 0.05\vec{\imath}\,\mathrm{N}$, a hmotné body se dají do pohybu. Určete polohu těžiště soustavy hmotných bodů v čase $t = 2\,\mathrm{s}$.

Výsledek $\mathrm{T}\left(\frac{2001}{6}, 2, -\frac{7}{6}\right)\,\mathrm{cm} = (3.335, 0.02, -0.011\overline{6})\,\mathrm{m}$

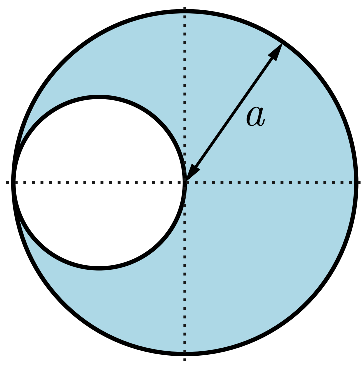
8.4 Příklad K.55/3

Na jednom konci desky délky $l = 3.6\,\mathrm{m}$ hmotnosti $m = 45\,\mathrm{kg}$ stojí člověk o dvojnásobné hmotnosti. Deska leží na vodorovné rovině, po které se může pohybovat bez tření. Jak daleko se deska posune, přejde-li člověk po desce na opačný konec? Nápověda: v izolované soustavě (bez vnějších sil) se poloha těžiště soustavy člověk-deska nezmění.

Výsledek $d = 2.4\,\mathrm{m}$

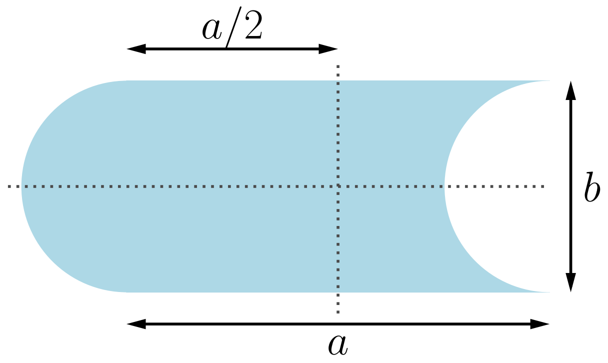
8.5 Příklad H.79/124

Najděte polohu těžiště útvaru, který vznikne, když se z kruhu o poloměru a vystřihne kruh o polovičním poloměru tak, že se vystřižený kruh dotýká okraje.



Výsledek Pokud je počátek souřadné soustavy ve středu velkého kruhu, potom $x_\mathrm{T} = -\frac{a}{6}$ a $y_\mathrm{T} = 0$.

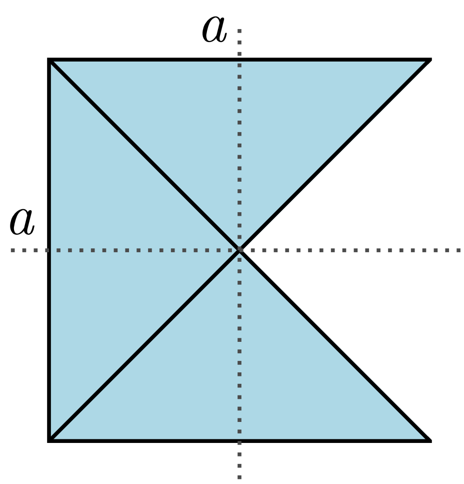
8.6 Příklad H.105/152



Najděte polohu těžiště tohoto útvaru. Nápověda: těžiště půlkruhu o poloměru r je posunuto o $\frac{4r}{3\pi}$ vůči středu kruhu.

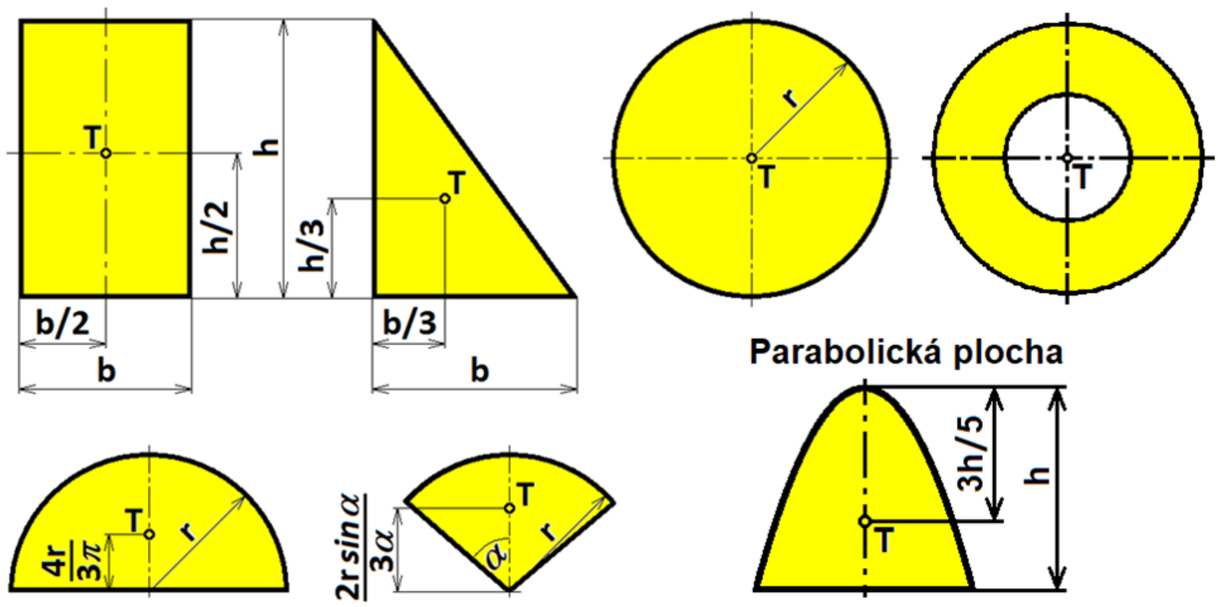
Výsledek Pokud je počátek souřadné soustavy ve středu obdélníku, potom $x_{\mathrm{T}} = -\pi\frac{b}{8}$ a $y_{\mathrm{T}} = 0$.

8.7 Příklad H.105/153



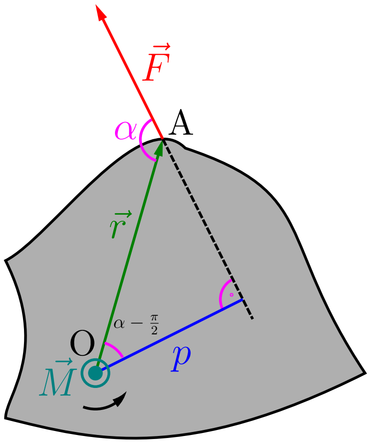
Nejděte těžiště útvaru, který vznikne, když se ze čtverce se stranou a vystřihne trojúhelník podle obrázku. Těžnice v trojúhelníku se protínají v těžišti. Těžiště rozděluje každou těžnici na dva díly v poměru 2 : 1, přitom vzdálenost těžiště od vrcholů trojúhelníku je dvojnásobkem vzdálenosti od středu protější strany.

Výsledek Pokud je počátek souřadné soustavy ve středu čtverce, potom $x_{\mathrm{T}} = -\frac{a}{9}$ a $t_{\mathrm{T}} = 0$.



9 Moment síly a setrvačnosti

Moment síly



Moment síly je vektorová veličina popisující účinek síly $\vec{F}$ působící v bodě A na otáčení tělesa kolem osy O. Pokud definujeme vektor $\vec{r}$ směřující z bodu O do bodu A, potom bude moment síly roven

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad [\mathrm{N\,m}].$$

Vektorový součin značí, že moment síly má kolmý směr na rovinu vytčenou vektory $\vec{r}$ a $\vec{F}$. Pokud známe úhel α mezi těmito dvěma vektory, potom je velikost momentu síly rovna $M = rF \sin \alpha$. Z této rovnice plyne, že pro úhel $\alpha = 90°$ je moment síly největší. Definujeme **rameno síly** p jako kolmou vzdálenost osy otáčení a směru síly.

Vektorový součin

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{i}(a_2 b_3 - a_3 b_2) - \vec{j}(a_1 b_3 - a_3 b_1) + \vec{k}(a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

Moment setrvačnosti

Moment setrvačnosti je důležitý při výpočtu kinetické energie tělesa, která je „uložená“ v jeho rotaci, $E_\mathrm{k} = J\omega^2/2$, kde ω je úhlová frekvence a J je moment setrvačnosti s jednotkou $\mathrm{kg\,m^2}$. Při výpočtu momentu setrvačnosti je důležitá hmotnost tělesa a její rozložení vzhledem k ose otáčení. V případě soustavy těles o hmotnostech m_i je moment setrvačnosti $J = \sum_i m_i r_i^2$, kde r_i jsou vzdálenosti jednotlivých těles od osy otáčení. Chceme-li určit moment setrvačnosti spojitého tělesa, přejde diskrétní suma ve spojitý integrál přes celou hmotnost tělesa M, $J = \int_M r^2\,\mathrm{d}m$. r je tentokrát vzdálenost elementů hmotnosti $\mathrm{d}m$. Je-li hmotnost v tělese rovnoměrně rozložena, potom můžeme vytknout hustotu ρ a integrovat přes objem tělesa V, $J = \rho \int_V r^2\,\mathrm{d}V$. V případě plošných těles můžeme použít stejný trik jako u výpočtu polohy těžiště, tedy přejít od hmotnosti k ploše ($\int \mathrm{d}m \to \int \mathrm{d}S$).

Steinerova věta

Známe-li moment setrvačnosti tělesa J_0, kdy osa otáčení prochází těžištěm tělesa, potom moment setrvačnosti tohoto tělesa o hmotnosti m vůči jiné ose vzdálené o r_T od těžiště bude $J = J_0 + mr_\mathrm{T}^2$.

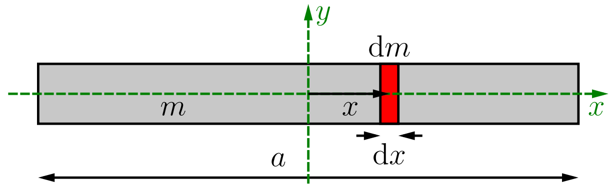
Výpočet momentu setrvačnosti těles

Podrobný postup výpočtu u různých těles lze najít na těchto odkazech:

- `http://mech.fd.cvut.cz/education/bachelor/18sat/download/zajic_momenty_setrvacnosti.pdf`
- `http://fyzweb.cz/materialy/srazky_a_rotace/k23.php`
- `http://reseneulohy.cz/555/moment-setrvacnosti-tyce`

Já se pokusím jen o stručný výpočet těch nejzákladnějších ploch a těles.

Tenká homogenní tyč s osou otáčení v polovině délky a se počítá tak, že element hmotnosti $\mathrm{d}m$ substituujeme elementem délky, $\mathrm{d}m = \frac{m}{a}\,\mathrm{d}x$. Integrál přes celou hmotnost bude potom integrálem přes délku tyče



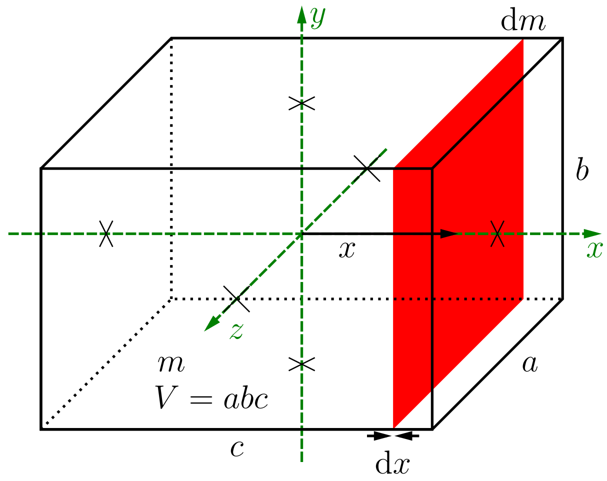
$$J = \int_M r^2\,\mathrm{d}m = \int_{-a/2}^{a/2} x^2 \frac{m}{a}\,\mathrm{d}x = \frac{m}{a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-a/2}^{a/2} = \frac{ma^2}{12}.$$

Pokud chceme určit moment setrvačnosti tyče vůči ose otáčení, která je mimo těžiště, potom můžeme použít buď Steinerovu větu nebo změnit meze integrace (například pro osu jdoucí koncem tyče by se integrovalo od 0 po a.

Obdélníková deska se počítá úplně stejně se stejným výsledkem jako homogenní tyč, protože na šířce tyče výsledek nezávisí. Obecně závisí jen na elementu hmotnosti a jeho vzdálenosti od osy otáčení. Je jedno, jestli je tento element bodový nebo je roztažený do metrové délky rovnoběžně s osou otáčení.

Kvádr je složen s obdélníkových desek vzdálených o x od osy rotace (y). Pokud by jsme chtěli vyjádřit hmotnost této desky, potom za předpokladu homogenně rozmístěné hmoty musí platit $\frac{\mathrm{d}m}{m} = \frac{\mathrm{d}V}{V} = \frac{ab\,\mathrm{d}x}{abc} = \frac{\mathrm{d}x}{c}$. Potom každá tato elementární deska (s $J_0 = \frac{a^2}{12}\mathrm{d}m$) bude přispívat k celkovému momentu setrvačnosti hodnotou

$$\mathrm{d}J = J_0 + x^2\,\mathrm{d}m = \left(\frac{a^2}{12} + x^2\right)\frac{m}{c}\,\mathrm{d}x.$$

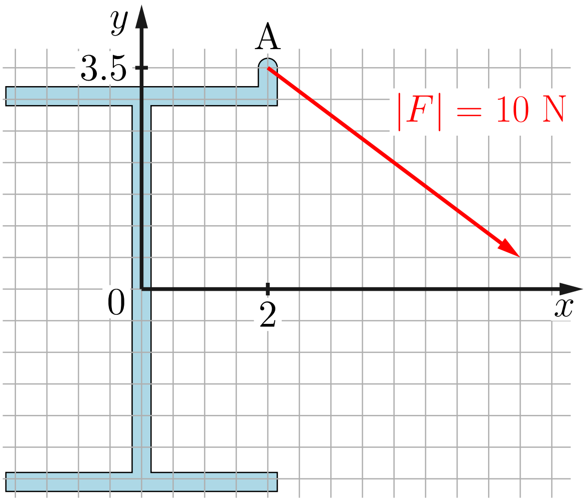


Nyní sečteme (přeintegrujeme) přes celou délku kvádru c, můžeme využít toho, že $\mathrm{d}J$ je sudá funkce

$$J = \int_{-c/2}^{c/2} \mathrm{d}J = 2\int_0^{c/2} \mathrm{d}J = 2\int_0^{c/2}\left(\frac{a^2}{12} + x^2\right)\frac{m}{c}\,\mathrm{d}x = 2\frac{m}{c}\left[\frac{a^2 x}{12} + \frac{x^3}{3}\right]_0^{c/2} = \frac{m}{12}(a^2 + c^2).$$

Je vidět, že výsledek nezávisí od výšky kvádru, která je rovnoběžná s osou rotace. Pokud bychom chtěli zjistit moment setrvačnosti vůči ose x nebo z, potom se jen ve vzorci adekvátně prostřídají rozměry.

9.1 Příklad R.1



Určete moment síly $\vec{M}$ vzhledem k počátku souřadnic, viz obrázek. Vzdálenosti jsou uvedeny v centimetrech.

Výsledek $\vec{M} = [0, 0, -0.4]\,\mathrm{N\,m}$

9.2 Příklad L.Dyn.2/1

Určete momenty setrvačnosti homogenního hranolu o hmotnosti $m = 24\,\mathrm{kg}$ s hranami $a = 10\,\mathrm{cm}$, $b = 20\,\mathrm{cm}$ a $c = 30\,\mathrm{cm}$ vzhledem k osám kolmým na jednotlivé stěny a procházející středy příslušných stěn.

Výsledek $J_a = 0.26\,\mathrm{kg\,m^2}$, $J_b = 0.2\,\mathrm{kg\,m^2}$, $J_c = 0.1\,\mathrm{kg\,m^2}$

9.3 Příklad L.Dyn.2/2

Vypočtěte moment setrvačnosti homogenní tyče délky $l = 1\,\mathrm{m}$ a hmotnosti $m = 15\,\mathrm{kg}$ vzhledem k ose kolmé na směr délky tyče a a) procházejí koncovým bodem tyče, b) procházející bodem ve čtvrtině délky tyče.

Výsledek a) $J = 5\,\mathrm{kgm^2}$, b) $J = \frac{35}{16}\,\mathrm{kgm^2} \approx 2.19\,\mathrm{kgm^2}$

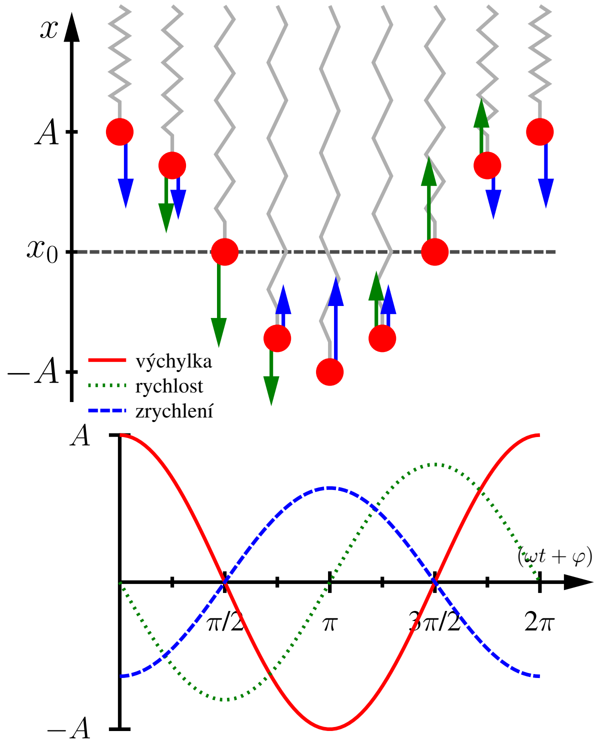
9.4 Příklad K.72/6

Na koncích tenké tyče délky l, jejíž hmotnost je zanedbatelná, jsou upevněna tělíska o hmotnostech m_1 a m_2, přičemž $m_1 > m_2$. Tyč je otáčivá kolem vodorovné osy jdoucí středem tyče kolmo k její délce. Tyč dáme do vodorovné polohy a pustíme. Určete počáteční úhlové zrychlení tyče a úhlovou rychlost tyče v okamžiku, kdy je ve svislé poloze.

Výsledek

$$\varepsilon = \frac{2g}{l}\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}, \qquad \omega = 2\sqrt{\frac{g(m_1 - m_2)}{l(m_1 + m_2)}}$$

10 Kmitání



Kmitání popisuje jakýkoliv **harmonický pohyb** tělesa kolem **rovnovážné polohy** x_0. U těchto pohybů platí, že na těleso působí síla přímo úměrná vzdálenosti tělesa od rovnovážné polohy a směřující k rovnovážné poloze, tedy $F = -kx$. Konstanta úměrnosti k je spojená s daným procesem, v případě kmitání tělesa na pružině je k přímo rovno **tuhosti pružiny**. U mechanického kyvadla je $k = mg/l$, kde l je **délka závěsu kyvadla**.

Z dřívějších kapitol víme, že zrychlení je druhou derivací dráhy podle času, tedy síla $F = ma = m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$. Dosadíme-li z předchozí rovnice pro sílu, získáme diferenciální rovnici druhého řádu $m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx$, jejímž jedním z možných řešení je $e^{\imath\omega t}$. To je komplexní funkce, nás zajímá reálná část, tedy harmonická funkce kosinus:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi), \qquad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

kde A [m] značí **amplitudu kmitů**, ω [rad/s] **úhlovou frekvenci**, f [Hz] **frekvenci**, T [s] **periodu** a φ [°] **počáteční fázi**. Pokud by jsme do diferenciální rovnice zahrnuli ještě ztráty, výsledkem by byl **tlumený harmonický pohyb**. Tím se zabývat nebudeme.

Když okamžitou výchylku opět zderivujeme podle času, dostaneme okamžitou rychlost a další derivací okamžité zrychlení:

$$v(t) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi), \qquad a(t) = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi).$$

Znaménko mínus značí opačnou orientaci vůči směru osy x. Když si zanalyzujeme jednu periodu, tak pro $\omega t + \varphi = 0$ je těleso v úvrati, tj. dosáhlo maximální výchylky A a má nulovou rychlost. Zároveň na něj působí největší zrychlení $a_{\mathrm{max}} = A\omega^2$, které těleso nejdřív zpomalovalo až do zastavení a následně ho bude urychlovat opačným směrem. Pro $\omega t + \varphi = \pi/2$ prochází těleso rovnovážnou polohou x_0 maximální rychlostí $v_{\mathrm{max}} = A\omega$, zrychlení je nulové ($a = 0$). Za čtvrt periody je těleso v druhé úvrati ($x = -A$) a za další čtvrt periody bude těleso procházet opět rovnovážnou polohou maximální rychlostí.

Z této analýzy je patrné přelévání kinetické a potenciální energie. **Kinetická energie** se opět spočítá podle vzorce $E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}mv(t)^2$. Maximální hodnoty nabývá v rovnovážné poloze, $E_{\mathrm{k\,max}} = \frac{1}{2}mA^2\omega^2$. V případě **potencionální energie** kyvadla zůstává vzorec $E_{\mathrm{p}} = mgh$, kde h je výškový rozdíl tělesa v rovnovážné poloze a v úvrati. U pružinu se potenciální energie ukrývá v natažení (stlačení) pružiny, přičemž $E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}kx(t)^2$. Tedy v rovnovážné poloze je nulová a maximální je v úvrati, $E_{\mathrm{p\,max}} = \frac{1}{2}kA^2$.

Kmitavé pohyby lze sčítat (spojená kyvadla nebo pružiny). Pokud se skládají **stejnosměrné kmity**, tak se jednoduše sečtou výchylky, $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$. Například, sečteme-li dva stejnosměrné kmity se stejnou frekvencí

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1), \qquad x_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2),$$

bude mít výsledné kmitání tvar

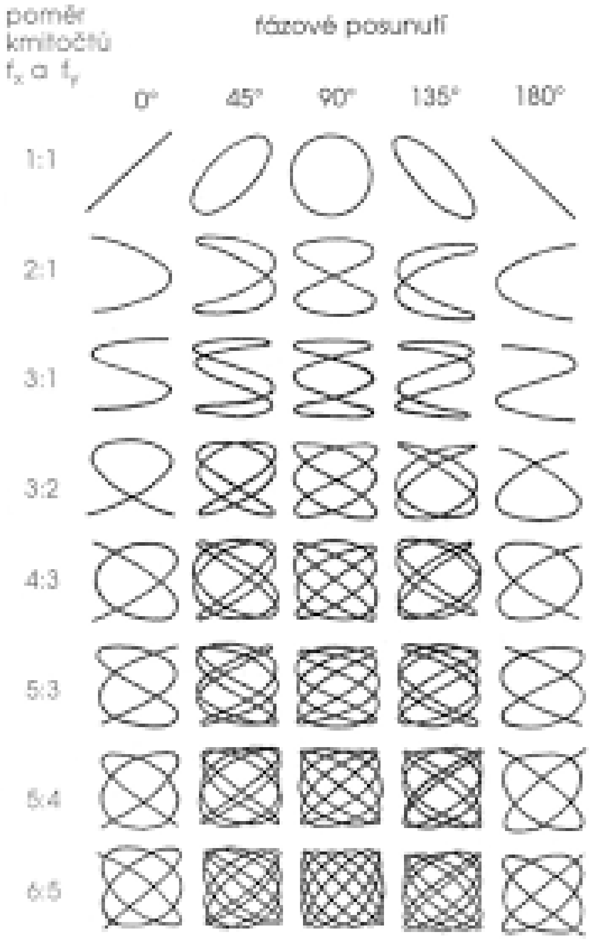
$$\begin{aligned} x(t) &= A_1(\cos\omega t \cos\varphi_1 - \sin\omega t \sin\varphi_1) + A_2(\cos\omega t \cos\varphi_2 - \sin\omega t \sin\varphi_2) \\ &= \cos\omega t (A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2) - \sin\omega t (A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2), \\ x(t) &= A \ \cos(\omega t + \varphi) = A \ \cos\omega t \cos\varphi - A \ \sin\omega t \sin\varphi. \end{aligned}$$

Z těchto dvou rovnice plyne, že

$$A \cos\varphi = A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2 \qquad \text{a} \qquad A \sin\varphi = A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2.$$

Pokud obě rovnice umocníme a sečteme, dostaneme výslednou amplitudu. Pokud rovnice podělíme, tak získáme počáteční fázi složeného kmitání:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}, \qquad \tan\varphi = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}.$$



V případech nestejnosměrného kmitání to už musíme řešit vektorově v ploše, popř. v prostoru. Trajektorii tělesa můžeme jednoduše zjistit tak, že spočteme souřadnice tělesa v jednotlivých okamžicích periody kmitu. Pokud se skládají dva kolmé kmity se stejnou frekvencí, potom výsledný pohyb tělesa bude obecně **elipsou**. V závislosti na velikostech amplitud a rozdílu fází může elipsa zdegradovat na kruh popřípadě úsečku, viz první řádek obrázku. Skládají-li se dva kolmé kmity rozdílných frekvencí, jsou trajektorií tělesa tzv. **Lissajousovy křivky**.

10.1 Příklad K.97/2

Jak se bude pohybovat kulička o hmotnosti m spuštěná z povrchu Země do tunelu procházejícího jeho středem s nulovou počáteční rychlostí, víme-li, že síla působící na kuličku uvnitř Země je přímo úměrná vzdálenosti kuličky od středu Země a je orientovaná do jejího středu. Určete čas, za který se kulička dostane z povrchu Země do jejího středu a rychlost průchodu kuličky středem Země. Počítejte s poloměrem Země $R_Z = 6\,378\,\mathrm{km}$.

Výsledek $t = 1\,254.5\,\mathrm{s} \approx 21\,\mathrm{min}$, $v \approx 7\,986\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

10.2 Příklad K.100/5

Jaká je frekvence netlumeného harmonického pohybu hmotného bodu o hmotnosti $m = 2\,\mathrm{kg}$, je-li amplituda kmitů $A = 10\,\mathrm{cm}$ a celková energie hmotného bodu je při tomto pohybu $1\,\mathrm{J}$?

Výsledek $f = \frac{5}{\pi}\,\mathrm{Hz} \approx 1.59\,\mathrm{Hz}$

10.3 Příklad K.102/7

Určete amplitudu a fázovou konstantu výsledného harmonického pohybu, který vznikne složením dvou stejnosměrných kmitů $y_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \phi_1)$ a $y_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \phi_2)$, kde $A_1 = A_2 = 50\,\mathrm{mm}$, $\phi_1 = 30°$ a $\phi_2 = 60°$.

Výsledek $A \approx 96.5\,\mathrm{mm}$, $\varphi = 45°$

10.4 Příklad K.117/15

Určete amplitudu harmonického pohybu, který vznikne složením dvou stejnosměrných kmitavých pohybů se stejnou periodou a s amplitudami $A_1 = 3\,\mathrm{cm}$ a $A_2 = 5\,\mathrm{cm}$, když je rozdíl jejich fází roven $60°$.

Výsledek $A = 7\,\mathrm{cm}$

10.5 Příklad K.103/9, 117/7

Najděte trajektorii pohybu, který vznikne složením dvou navzájem kolmých kmitavých pohybů se stejnými periodami,

a) se stejnými amplitudami o velikosti $5\,\mathrm{cm}$ a fázovým rozdílem $\pi/2$,

b) s amplitudami o velikostech $A_1 = 7\,\mathrm{cm}$ a $A_2 = 4\,\mathrm{cm}$ a nulovým fázovým rozdílem,

c) s amplitudami o velikostech $A_1 = 5\,\mathrm{cm}$ a $A_2 = 3\,\mathrm{cm}$ a fázovým rozdílem π.

Výsledek a) Pohyb v kruhu se středem v počátku a o poloměru A po směru hodinových ručiček. b) Těleso kmitá na úsečce procházející počátkem mezi body $(7, 4)$ a $(-7, -4)$. c) Těleso kmitá po úsečce procházející počátkem mezi body $(5, -3)$ a $(-5, 3)$.

10.6 Příklad K.113/1

Hmotný bod koná harmonický pohyb kolem bodu $x_0 = 0\,\mathrm{m}$. V čase $t = 0\,\mathrm{s}$ má nulovou rychlost a polohu $x_1 = 3.7 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$. Je-li frekvence pohybu $f = 0.25\,\mathrm{Hz}$, najděte:

a) periodu pohybu T,

b) kruhovou frekvenci ω,

c) amplitudu A

d) výchylku a rychlost v libovolném čase,

e) amplitudu rychlosti a zrychlení.

Výsledek a) $T = 4\,\mathrm{s}$, b) $\omega = \pi/2\,\mathrm{rad\,s^{-1}} \approx 1.57\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$, c) $A = 3.7 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$,
d) $x = 3.7\cos(\pi t/2)\,\mathrm{mm}$, $v = -1.85\pi\sin(\pi t/2)\,\mathrm{mm\,s^{-1}}$,
e) $v_{\max} = 1.85\pi\,\mathrm{mm\,s^{-1}} \approx 5.8\,\mathrm{mm\,s^{-1}}$, $a_{\max} = 0.925\pi^2\,\mathrm{mm/s^2} \approx 9.1\,\mathrm{mm/s^2}$

10.7 Příklad K.113/2

V čase $t = 0\,\mathrm{s}$ je výchylka tělesa $y(0) = 4.3\,\mathrm{cm}$ a jeho rychlost $v(0) = 3.2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Hmotnost tělesa je $m = 4\,\mathrm{kg}$ a jeho celková energie je $E = 79.5\,\mathrm{J}$. Napište vztah pro závislost výchylky na čase a vypočtěte dráhu tělesa za dobu $0.4\,\mathrm{s}$ od začátku pohybu.

Výsledek $y(t) \approx 5.0\cos(126.1t + 0.53)\,\mathrm{cm}$, $s = 1.6\,\mathrm{m}$

10.8 Příklad H.145/234

Určete amplitudu a fázovou konstantu netlumeného harmonického pohybu hmotného bodu po přímce, když hmotný bod v čase $t = 0\,\mathrm{s}$ má výchylku $x(0) = 5\,\mathrm{cm}$, rychlost $v(0) = 20\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$ a frekvenci pohybu $f = 1\,\mathrm{Hz}$.

Výsledek $A \approx 5.93\,\mathrm{cm}$, $\varphi \approx -32.5^\circ$

10.9 Příklad K.113/3

Těleso kmitá harmonicky s amplitudou A a kruhovou frekvencí ω. Při které výchylce je jeho energie kinetická rovna jeho energii potenciálové?

Výsledek $\frac{\sqrt{2}}{2}$ amplitudy od rovnovážné polohy (jedno na jakou stranu)

10.10 Příklad H.117/16

Hmotný bod koná dva harmonické kmitavé pohyby v jednom směru, které jsou popsány rovnicemi:

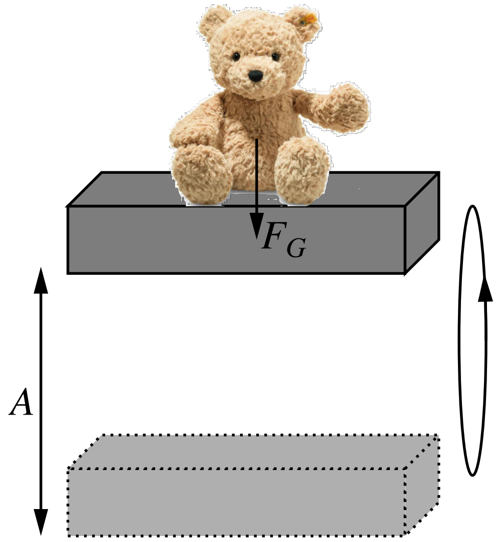
$$y_1(t) = A\sin(\omega t), \qquad y_2(t) = A\sin(2\omega t).$$

Určete maximální rychlost hmotného bodu.

Výsledek $v_{\max} = 3A\omega$

10.11 Příklad H.147/236

Horizontální deska koná harmonický pohyb ve vertikálním směru s amplitudou $A = 0.75\,\mathrm{m}$. Jaká může být maximální frekvence kmitání desky, aby se závaží, které je volně uložené na desce, od ní neoddělilo? Předpokládejme gravitační zrychlení $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.



Výsledek $f_{\max} \approx 0.58\,\mathrm{Hz}$

10.12 Příklad H.160/256

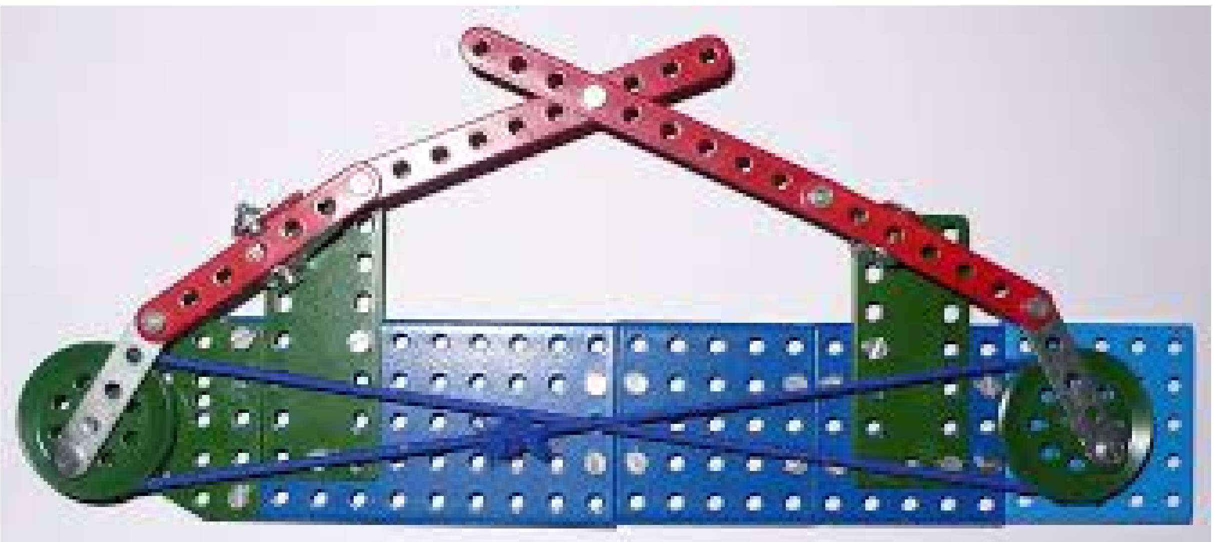
Na horizontální desce leží závaží o hmotnosti $m = 0.3\,\mathrm{kg}$. Deska koná harmonický pohyb ve vertikálním směru s periodou $T = 0.5\,\mathrm{s}$ a amplitudou $A = 3\,\mathrm{cm}$. Jakou největší silou $F_{\max}$ tlačí závaží na desku? Předpokládejme gravitační zrychlení $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

Výsledek $F_{\max} \approx 4.36\,\mathrm{N}$

10.13 Příklad H.160/254

Horizontální deska koná harmonický pohyb ve vodorovném směru s periodou $T = 5\,\mathrm{s}$. Závaží ležící na desce se po něm začne klouzat v okamžiku, kdy amplituda kmitů je zvýšena nad hodnotu $5\,\mathrm{cm}$. Jaký je koeficient tření mezi závažím a deskou? Předpokládejme gravitační zrychlení $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

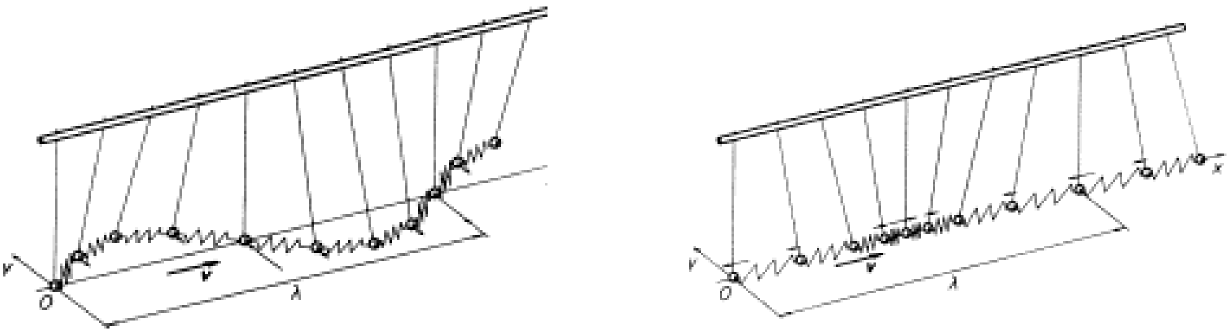
Výsledek $f \approx 0.008$



Přístroj pro vykreslování Lissajousových obrazců (J. Pauk, M. Krčmář)

11 Vlnění

Pokud je kmitající částice nějakým způsobem spojena s dalšími částicemi, potom se kmitavý pohyb přenáší i na další částice. Šíření kmitání mezi částicemi se nazývá **vlnění**. Vlnění může mít mnoho podob, například vlny na vodní hladině. Hodně známé jsou zvukové vlny, které se šíří ve vzduchu, ve vodě i v kovu. Rychlost šíření je úměrná síle vazby molekul, tedy ve vzduchu je nejpomalejší a v kovu nejrychlejší. Obecně mohou částice kmitat ve všech směrech. Pokud kmitají ve směru šíření, potom vlnění označujeme za **podélné**, pokud je kmitání kolmé na směr šíření, nazýváme ho **příčné**. Pokud se směr kmitání částic zachovává, mluvíme o tzv. **polarizované vlně**. Světlo je též vlnou, kde kmitá elektrické a magnetické pole. Je to jediné vlnění, které se může šířit i v úplném vakuu.



Obrázek 2: Vlevo příčné, vpravo podélné vlnění. Zdroj http://radek.jandora.sweb.cz/f11.htm

Vlnění má pár parametrů shodných s kmitáním: periodu T, frekvenci f a úhlovou frekvenci ω. Nově se definuje **vlnová délka** λ [m] jako nejmenší prostorová vzdálenost dvou bodů, které mají stejnou fázi. Vlnová délka je nepřímo úměrná **vlnovému číslu** $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

Částice kmitají kolem svých rovnovážných poloh, pohybuje se místo, kde mají částice určitou fázi. Tato **fázová rychlost** představuje rychlost šíření vlny, resp. šíření její fáze,

$$v_\mathrm{f} = \lambda f = \frac{2\pi f}{k} = \frac{\omega}{k}.$$

Časoprostorová závislost nějaké veličiny spojené s vlněním má závislost ve tvaru $f(v_\mathrm{f}t - x)$.

Při šíření vln platí **Huygensův princip**, vlny mohou **interferovat** (skládat se), **ohýbat se** na překážkách velikostí srovnatelných s vlnovou délkou a **lámat podle Snellova zákona**

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_\mathrm{f1}}{v_\mathrm{f2}},$$

kde α je úhel dopadu vlny na rozhraní, β úhel lomu a $v_\mathrm{f1,2}$ jsou fázové rychlosti šíření vlny v obou prostředích.

Dopplerův jev popisuje změnu frekvence vlnění v případě, pokud se pohybuje vysílač nebo příjemce. V případě pohybu zdroje vlnění (zvuku, světla) o frekvenci f_0 bude přijímač slyšet/vidět frekvenci

$$f = f_0 \frac{v_\mathrm{f}}{v_\mathrm{f} + v},$$

kde v je rychlost pohybu zdroje, při přibližování záporná, při vzdalování kladná. Pokud se pohybuje přijímač rychlostí v, potom se frekvence posune podle vzorce

$$f = f_0 \frac{v_\mathrm{f} + v}{v_\mathrm{f}},$$

tentokrát bude znaménko rychlosti zdroje v kladné v případě přibližování a záporné při oddalování.

11.1 Příklad K.122/3

Vlna o frekvenci $f = 500\,\mathrm{Hz}$ má fázovou rychlost $v_\mathrm{f} = 350\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

a) Jak jsou od sebe vzdáleny dva body prostředí, liší-li se jejich fáze o 60°?

b) Jaký je fázový rozdíl mezi dvěma výchylkami téhož bodu po uplynutí času $t = 1\,\mathrm{ms}$?

Výsledek a) $11.\overline{6}$ cm, b) $\varphi = \pi\,\mathrm{rad}$

11.2 Příklad K.125/7

Pod jakým největším úhlem může dopadat zvuková vlna na rozhraní vzduchu a vody, má-li proniknout do vody? Při dané teplotě je rychlost zvuku ve vzduchu $v_1 = 340\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ a ve vodě $v_2 = 1\,450\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

Výsledek $\alpha_\mathrm{m} = 13.56°$

11.3 Příklad K.128/11

Píšťala lokomotivy vydává tón o frekvenci $f = 450\,\mathrm{Hz}$. Jede-li lokomotiva kolem pozorovatele rychlostí $v = 72\,\mathrm{km/hod}$, jaký tón pozorovatel uslyší při příjezdu a při odjezdu lokomotivy? Jak by se frekvence změnily, pokud by píšťala byla statická a pohyboval se pozorovatel? Rychlost zvuku za daných podmínek je $340\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

Výsledek
pohyblivá píšťala – příjezd $f \approx 478\,\mathrm{Hz}$, odjezd $f = 425\,\mathrm{Hz}$
statická píšťala – příjezd $f \approx 476\,\mathrm{Hz}$, odjezd $f \approx 424\,\mathrm{Hz}$

12 Mechanika kontinua

Látkové množství n [mol] je relativní veličina definovaná jako podíl počtu částic N (atomů, iontů, molekul atd.) ku Avogadrově konstantě N_A. Látkové množství lze vyjádřit i jako podíl hmotnosti m a **molární hmotnosti** M_m nebo objemu V a molárního objemu V_m,

$$n = \frac{N}{N_\mathrm{A}} = \frac{m}{M_\mathrm{m}} = \frac{V}{V_\mathrm{m}}.$$

Molární hmotnost atomu je součinem relativní atomové hmotnosti A_r (najdete v periodické tabulce prvků), atomové hmotnostní konstanty m_u a Avogadrova čísla, $M_\mathrm{m} = A_\mathrm{r} m_\mathrm{u} N_\mathrm{A}$. V případě molekul se sečtou molární hmotnosti všech atomů. U plynů pozor, většinou tvoří dvouatomové molekuly, např. O_2.

Stavová rovnice ideálního plynu

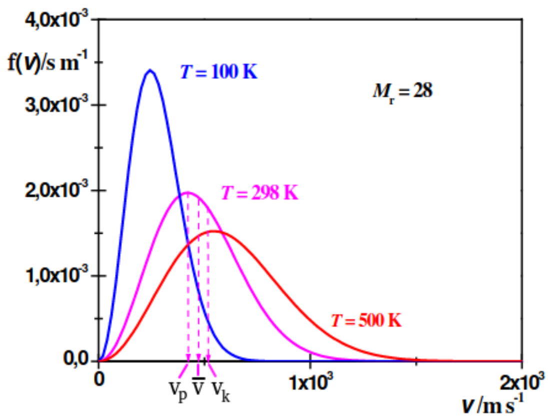
Stavová rovnice vznikla syntézou a zobecněním již známých zákonitostí chování plynů, později byla odvozena z termodynamiky. Spojuje dohromady tlak, objem, teplotu a látkové množství plynu,

$$pV = nRT = \frac{m}{M_\mathrm{m}} RT,$$

kde $R = k_\mathrm{B} N_\mathrm{A}$ se nazývá molární plynová konstanta.

Daltonův zákon nám říká, že úhrnný tlak plynné směsi je roven součtu parciálních tlaků jednotlivých složek, $p = \sum_j p_j$.

Maxwellovo rozdělení rychlostí



Molekuly plynů se kvůli neustálým srážkám pohybují různými rychlostmi a směry. V roce 1860 odvodil Maxwell pravděpodobnostní rozložení pro rychlosti, které ale není symetrické. Proto rychlost v_p, která se vyskytuje s největší pravděpodobností, je různá od střední aritmetické ($\overline{v}$) a střední kvadratické (v_k) rychlosti,

$$v_\mathrm{p} = \sqrt{\frac{2RT}{M_\mathrm{m}}}, \qquad \overline{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M_\mathrm{m}}}, \qquad v_\mathrm{k} = \sqrt{\frac{3RT}{M_\mathrm{m}}}.$$

Dosazením střední kvadratické rychlosti do rovnice pro kinetickou energii částic dostaneme předpis pro **střední kinetickou energii** translačního pohybu N molekul plynu,

$$W_\mathrm{k} = \frac{1}{2} m v_\mathrm{k}^2 = \frac{3}{2} \frac{m}{M_\mathrm{m}} RT = \frac{3}{2} N k_\mathrm{B} T.$$

Atomová hmotnostní konstanta	$m_\mathrm{u} = 1.661 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
Avogadrova konstanta	$N_\mathrm{A} = 6.022\,17 \times 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$
Boltzmanova konstanta	$k_\mathrm{B} = 1.38 \times 10^{-23}\,\mathrm{J\,K^{-1}}$
Molární plynová konstanta	$R = 8.314\,\mathrm{K^{-1}\,mol^{-1}}$

12.1 Příklad Ho.19/3a

Určete molární hmotnost plynu, který je směsí 160 g kyslíku a 120 g dusíku. Uvažujte, že relativní atomová hmotnost kyslíku je 16 a dusíku 14.

Výsledek $M_\mathrm{m} \approx 30.15\,\mathrm{g\,mol^{-1}}$

12.2 Příklad Ho.19/3b

Určete hustotu směsi plynu, která obsahuje 4 g vodíku a 32 g kyslíku při teplotě 7 °C a tlaku 9.33×10^4 Pa. Uvažujte, že relativní atomová hmotnost vodíku je 1 a kyslíku 16.

Výsledek $\rho \approx 0.481\,\mathrm{kg/m^3}$

12.3 Příklad Ho.21/9

V nádobě o objemu $2\,\mathrm{m}^3$ je při teplotě $T = 100\,°\mathrm{C}$ a tlaku $p = 4 \times 10^5$ Pa směs kyslíku O_2 a oxidu siřičitého SO_2. Vypočtěte parciální tlaky obou plynů, jestliže hmotnost oxidu siřičitého v nádobě je 8 kg. Uvažujte, že relativní atomová hmotnost kyslíku je 16 a síry 32.

Výsledek $p_\mathrm{SO2} \approx 1.938 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$, $p_\mathrm{O2} \approx 2.062 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$

12.4 Příklad Ho.20/3a

Určete střední kvadratickou rychlost molekul kyslíku O_2 při teplotě $T = 132\,°\mathrm{C}$. Uvažujte, že relativní atomová hmotnost kyslíku je 16.

Výsledek $v_\mathrm{k} \approx 561.8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

12.5 Příklad Ho.20/3b

Určete střední kvadratickou rychlost molekul hélia He_2 při teplotě $T = 0.1\,\mathrm{K}$. Uvažujte, že relativní atomová hmotnost hélia je 2.

Výsledek $v_\mathrm{k} \approx 25.0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

12.6 Příklad Ho.20/2

Vypočtěte střední kinetickou energii posuvného pohybu molekuly plynu při teplotě $T = 1\,000\,°\mathrm{C}$.

Výsledek $W_\mathrm{k} \approx 2.6 \times 10^{-20}\,\mathrm{J}$
PS: Jeden mol plynu by měl kinetickou energii N_A krát větší, $W_\mathrm{k} \approx 15.87\,\mathrm{kJ}$.